



Material Didático do Curso de Engenharia Mecânica da UniEVANGÉLICA

Disciplina: Cálculo II

Docente(s): Carlos Eduardo Fernandes

Cláudia Gomes de Oliveira Santos

Ricardo Wobeto

Volume 01, 2018

UniEVANGÉLICA
CENTRO UNIVERSITÁRIO

Centro Universitário de Anápolis - UniEVANGÉLICA

Associação Educativa Evangélica

Conselho de Administração

Presidente – Ernei de oliveira Pina

1º Vice-Presidente – Cicílio Alves de Moraes

2º Vice-Presidente – Ivan Gonçalves da Rocha

1º Secretário – Geraldo Henrique Ferreira Espíndola

2º Secretário – Francisco Barbosa de Alencar

1º Tesoureiro – Augusto César da Rocha Ventura

2º Tesoureiro – Djalma Maciel Lima

Centro Universitário de Anápolis

Chanceler – Ernei de Oliveira Pina

Reitor – Carlos Hassel Mendes da Silva

Pró-Reitor Acadêmico - Cristiane Martins Rodrigues Bernardes

Pró-Reitor de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Ação Comunitária - Sandro Dutra e Silva

Coordenadora da Pesquisa e Inovação - Bruno Junior Neves

Coordenador de Extensão e Ação Comunitária - Fábio Fernandes Rodrigues

Equipe Editorial

Diretor - Hélio de Souza Queiroz

Coordenador de Pesquisa – Rosemberg Fortes Nunes Rodrigues

Coordenador Pedagógico - Wilson de Paula e Silva

Coordenador de Planejamento e Inovação - Ricardo Wobeto

Coordenador de Laboratórios e de Atividades de Extensão - Sérgio Mateus Brandão

Coordenador de Estágio Supervisionado - Marcio José Dias

CÁLCULO III – ENGENHARIAS – AULA 1

INTEGRAÇÃO

Sabemos que , dada uma função $f(x) = 3x^2$, ao derivarmos $f(x)$ obtemos $f'(x) = 6x$.

Digamos que temos $f'(x) = 6x$, podemos afirmar que $f(x) = 3x^2$ pois $\frac{d}{dx}(3x^2) = 6x$;

a este processo damos o nome de **ANTIDERIVAÇÃO**, ou seja, o processo que determina a função original (**Primitiva**) a partir de sua derivada.

“ Vamos utilizar a notação $F(x)$ como **antiderivada** de $f(x)$ “.

OBS : Seja $F(x)$ uma antiderivada de $f(x)$, então $F(x) + C$ também o é, onde C é uma **Constante de Integração**, por exemplo :

$F(x) = x^4$, $G(x) = x^4 + 3$, $H(x) = x^4 - 5$ são antiderivadas de $4x^3$ pois a derivada de cada uma delas é $4x^3$. Logo, todas as antiderivadas de $4x^3$ são da forma $x^4 + C$. Daí o processo de antiderivação nos dar uma **família** de funções que se diferenciam pela **constante**.

NOTAÇÕES :

O processo de antiderivação é a operação inversa da derivação e é também chamada de **INTEGRAÇÃO** e indicamos pelo símbolo $\int f(x)dx$ (**Integral Indefinida**), como tal indica uma família de antiderivadas de $f(x)$, temos :

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- Lembrando que $F(x)$ é uma função tal que $F'(x) = f(x)$ e C uma constante arbitrária, \int símbolo de integral, dx diferencial, $f(x)$ integrando.

Exemplos :

$$\int 2dx = 2x + C$$

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$\int 4tdt = 2t^2 + C$$

Cálculo de Antiderivadas (Integrais)

- $\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x) \rightarrow$ A **diferenciação** é o **inverso** da **integração**.
- $\int f'(x) dx = f(x) + C \rightarrow$ A **integração** é o **inverso** da **diferenciação**.

Fórmulas fundamentais de Integração

$$\text{a) } \int k dx = kx + C \text{ com } k : \text{cte. (Regra da Constante)}$$

$$\text{b) } \int kf(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \text{ (Regra do Múltiplo constante)}$$

$$\text{c) } \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \text{ (Regra da Soma)}$$

$$\text{d) } \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx \text{ (Regra da Diferença)}$$

$$\text{e) } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ com } n \neq -1 \text{ (Regra Simples da Potência)}$$

$$\text{Obs. : } \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \text{ com } x > 0.$$

Exemplos :

Acompanhe os passos básicos para uma “ boa “ integração :

$$1) \int 3x dx = 3 \cdot \int x dx = 3 \cdot \int x^1 dx = 3 \left(\frac{x^2}{2} \right) + C = \frac{3x^2}{2} + C.$$

↖
↖
↖
↖

b
x = x¹
e
Simplificando

$$2) \int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

$$3) \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + C = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C.$$

OBS. : Para verificarmos se o resultado está correto, basta **deriva-lo** e “**tentar**” obter o “**Integrando**”.

Exercícios :

Resolva as Integrais :

1) $\int x^5 dx =$

2) $\int (3s + 4)^2 ds =$

3) $\int \sqrt{2px} dx =$

4) $\int \text{sen } x dx =$

5) $\int \text{cos } x dx =$

6) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx =$

7) $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx =$

8) O custo marginal da fabricação de x unidades de um produto tem como modelo a seguinte equação $\frac{dC}{dx} = 32 - 0,04x$ (**Custo Marginal**). A produção da **primeira** unidade custa \$ 50. Ache o **Custo Total** da produção de **200** unidades.

9) Ache a **Função Custo** correspondente ao custo marginal $\frac{dC}{dx} = \frac{1}{20\sqrt{x}} + 4$ com custo de \$ 750 para $x = 0$.

10) Ache a equação da função $f(x)$ cujo gráfico passa pelo ponto **P (4, 2)** e possui derivada $f'(x) = 6\sqrt{x} - 10$.

=====

=====

CÁLCULO III – ENGENHARIAS – AULA 2

Regra Geral da Potência

Sabemos que a Regra Simples da Potência é dada por $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ com $n \neq -1$ usada quando a função é expressa como potência de x somente.

Vejamos outros tipos de funções :

Para calcular $\int 2x(x^2 + 1)^3 dx$ temos que encontra $f(x)$ tal que $f'(x) = 2x \cdot (x^2 + 1)^3$, daí :

$$\blacksquare \frac{d}{dx} \left[(x^2 + 1)^4 \right] = 4 \cdot (x^2 + 1)^3 \cdot 2x \quad (\text{Regra da Cadeia}).$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} \left[\frac{(x^2 + 1)^4}{4} \right] = (x^2 + 1)^3 \cdot 2x \quad (\text{Dividir ambos os membros por 4}).$$

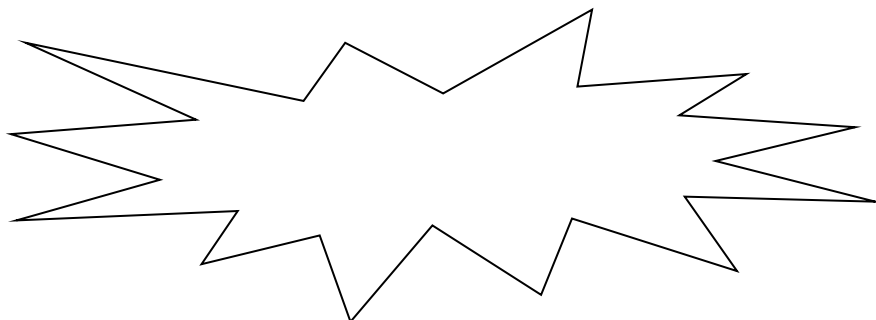
$$\blacksquare \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + C = \int 2x(x^2 + 1)^3 dx \quad (\text{Integrando}).$$

Note $2x$ no integrando ele é exatamente $(x^2 + 1)'$.

Fazendo $x^2 + 1 = u$, temos $du = 2x dx$, logo :

$$\int 2x(x^2 + 1)^3 dx = \int u^3 \cdot \frac{du}{dx} dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C.$$

▣ Daí a **Regra Geral da Potência** para u função diferenciável de x ser ...



$$\int u^n \cdot \frac{du}{dx} dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \text{ com } n \neq -1.$$

Exemplos :

▣ Calcule as seguintes integrais indefinidas :

$$\text{a) } \int 3 \cdot (3x-1)^4 dx \rightarrow \begin{cases} u = 3x-1 \\ \frac{du}{dx} = 3 \Leftrightarrow du = 3dx \end{cases} \quad \therefore \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{(3x-1)^5}{5} + C.$$

$$\text{b) } \int (2x+1) \cdot (x^2+x) dx \rightarrow \begin{cases} u = x^2+x \\ \frac{du}{dx} = 2x+1 \Leftrightarrow du = (2x+1)dx \end{cases} \quad \therefore \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{(x^2+x)^2}{2} + C = \frac{x^4+2x^3+x^2}{2} + C$$

$$\text{c) } \int 3x^2 \cdot \sqrt{x^3-2} dx = \int 3x^2 \cdot (x^3-2)^{\frac{1}{2}} dx \rightarrow \begin{cases} u = x^3-2 \\ \frac{du}{dx} = 3x^2 \Leftrightarrow du = 3x^2 dx \end{cases} \quad \therefore \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{(x^3-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x^3-2)^3} + C$$

d)

$$\int \frac{-4x}{(1-2x^2)^2} dx = \int (-4x)(1-2x^2)^{-2} dx \rightarrow \begin{cases} u = -2x^2 + 1 \\ \frac{du}{dx} = -4x \Leftrightarrow du = -4x dx \end{cases} \quad \therefore \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{(-2x^2+1)^{-1}}{-1} = \frac{1}{2x^2-1} + C$$

Exercícios :

▣ Calcule as seguintes integrais indefinidas :

1) $\int (1+2x)^4 \cdot 2dx$

2) $\int \sqrt{5x^2-4} \cdot 10x dx$

3) $\int (x-1)^4 dx$

4) $\int \frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2} dx$

5) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}} dx$

Integração por Partes

Tomando como ponto de partida a **Derivação** pela **Regra do Produto** temos ...

$$\bullet \frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv' \quad (\text{Regra do Produto})$$

$$\bullet uv = \int \left[\frac{d}{dx}(uv) \right] = \int u'v dx + \int uv' dx \quad (\text{Integrando ambos os lados})$$

$$\bullet uv = \int vu' dx + \int uv' dx \quad (\text{Reescrevendo a expressão})$$

$$\bullet uv = \int vdu + \int vudv \quad (\text{Escrevendo na forma diferencial})$$

Daí temos ...

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Integração por Partes com u e v funções diferenciáveis de x.

AO aplicarmos esta técnica devemos separar o **integrando** em **duas** partes, **u** e **dv**, levando em conta duas diretrizes :

1) A parte escolhida como **dv** deve ser facilmente integrável.

2) $\int v du$ deve ser mais simples do que $\int u dv$.

Exemplos / Exercícios :

1) Determine $\int x \cdot \text{sen } x dx$.

Resolução:

Temos basicamente três “saídas” :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } u = \text{sen } x ; dv = x dx \\ \text{b) } u = x \cdot \text{sen } x ; dv = dx \\ \text{c) } u = x ; dv = \text{sen } x dx \end{array} \right.$$

• Na saída **a** obtemos **du = cos x dx** e **v = $\frac{x^2}{2}$ = $\int dv = \int x dx$** , logo temos :

$\int x \text{sen } x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \text{sen } x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \text{cos } x dx$, a nova integral que é **mais complicada** do que a original.

• Em **b** temos :

$$\left\{ \begin{array}{l} du = \text{sen } x + x \cdot \text{cos } x dx \\ v = \int dv = \int dx = x \end{array} \right. \quad \text{logo, } \int x \text{sen } x dx = x^2 \cdot \text{sen } x - \int x(\text{sen } x + x \text{cos } x) dx .$$

Tentemos pois a “saída” $c \dots$

• Em c : $\left\{ \begin{array}{l} du = 1dx \\ \int x \operatorname{sen} x dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C \end{array} \right.$,

$v = \int dv = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$,

Lembrando ...

$$\int u dv = uv - \int v du$$

2) Idem para $\int x^2 e^x dx$.

Resolução: $\left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right.$

Portanto:

$$\int u dv = uv - \int v du \Leftrightarrow \int x^2 e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \underbrace{e^x (x-1)}_{*} + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

* $\int x e^x dx \therefore \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right.$ Daí ... $\int x e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x (x-1) + C$

3) Idem para $\int \sin^2 x dx$.

4) Idem para $\int x^3 \ln x dx$.

5) Idem para $\int x^3 e^{2x} dx$.



CÁLCULO III – ENGENHARIAS – AULA 3

Integrais Trigonométricas

■ Começemos com uma **pequena** tabela de **Integrais Trigonométricas ...**

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • $\int \cos u du = \sin u + C$ • $\int \sin u du = -\cos u + C$ • $\int \sec^2 u du = \tan u + C$ • $\int \sec u \cdot \tan u du = \sec u + C$ • $\int \cos \sec^2 u du = -\cot u + C$ | <ul style="list-style-type: none"> • $\int \cos \sec u \cdot \cot u du = -\cos \sec u + C$ • $\int \tan u du = \ln \sec u + C = -\ln \cos u + C$ • $\int \cot u du = \ln \sin u + C$ • $\int \sec u du = \ln \sec u + \tan u + C$ • $\int \cos \sec u du = \ln \cos \sec u - \cot u + C$ |
|--|--|

■ Recordando algumas das principais **Identidades Trigonométricas ...**

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ • $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ • $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$ • $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ • $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ • $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ | <ul style="list-style-type: none"> • $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$ • $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$ • $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$ • $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ • $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ • $1 \pm \sin x = 1 \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ |
|--|---|

Exemplos / Exercícios :

☐ Achar as integrais indefinidas :

$$1) \int 2 \cos x dx = 2 \int \cos x dx = \boxed{2 \operatorname{sen} x + C} .$$

$$2) \int 3x^2 \operatorname{sen} x^3 dx \rightarrow \begin{cases} u = x^3 \\ \frac{du}{dx} = 3x^2 \Leftrightarrow du = 3x^2 dx \end{cases} \quad \therefore \int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C = \boxed{-\cos x^3 + C} .$$

$$3) \int \operatorname{sen} 2x dx \rightarrow \begin{cases} u = 2x \\ du = 2dx \end{cases} \quad \therefore \int \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \cdot 2dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x \cdot 2dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} u du = -\frac{1}{2} \cos u + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int \operatorname{sen} 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C} .$$

$$4) \int x \cos x^2 dx \rightarrow \begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x dx \end{cases} \quad \therefore \int \frac{1}{2} \cos x^2 \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \operatorname{sen} u + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + C} .$$

$$5) \int x \operatorname{sen} x^2 dx$$

$$8) \int \operatorname{tg} 3x dx$$

6) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$

9) $\int \sec^2 \frac{x}{2} dx$

7) $\int \sec 3x \operatorname{tg} 3x dx$

10) $\int \frac{\sec^2 2x}{\operatorname{tg} 2x} dx$

CÁLCULO III – ENGENHARIAS – AULA 4

Substituições Trigonômétricas

Vamos estudar agora integrais que apresentem as formas $\sqrt{a^2 - b^2 \cdot u^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2 \cdot u^2}$ e $\sqrt{b^2 \cdot u^2 - a^2}$.

Podemos expressá-las sem os radicais, utilizando a chamada **Substituição Trigonômétrica** conforme a tabela :

Caso	Radical	Substit. Trigonômétrica	Transformada	Trigonometria no Triângulo Retângulo
I	$\sqrt{a^2 - b^2 \cdot u^2}$	$u = \frac{a}{b} \cdot \text{sen } \theta$	$a \cdot \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta} = a \cdot \text{cos } \theta$	$\text{tg } \theta = \frac{CO}{CA}$
II	$\sqrt{a^2 + b^2 \cdot u^2}$	$u = \frac{a}{b} \cdot \text{tg } \theta$	$a \cdot \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta} = a \cdot \text{sec } \theta$	$\text{cos } \theta = \frac{CA}{HI}$
III	$\sqrt{b^2 \cdot u^2 - a^2}$	$u = \frac{a}{b} \cdot \text{sec } \theta$	$a \cdot \sqrt{\text{sec}^2 \theta - 1} = a \cdot \text{tg } \theta$	$\text{sen } \theta = \frac{CO}{HI}$

Demonstraremos o desenvolvimento do radical $\sqrt{a^2 - b^2 \cdot u^2}$, os demais casos são análogos

...

•

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - b^2 \cdot u^2} &= \sqrt{a^2 - b^2 \left(\frac{a}{b} \text{sen } \theta \right)^2} = \sqrt{a^2 - b^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} \text{sen}^2 \theta} = \sqrt{a^2 - a^2 \text{sen}^2 \theta} = \sqrt{a^2 \cdot (1 - \text{sen}^2 \theta)} = \\ &= a \cdot \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta} = a \sqrt{\text{cos}^2 \theta} = \boxed{a \cdot \text{cos } \theta} . \end{aligned}$$

Obs. : Repare que a variável final é θ . A expressão correspondente, na variável original, é obtida usando-se um **triângulo retângulo**.

Exemplos :

$$1) \text{ Achar a integral } \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}} \quad \Pi \quad \begin{cases} a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2. \\ b^2 = 1 \Leftrightarrow b = 1. \\ u^2 = x^2 \Leftrightarrow u = x. \\ u = \frac{a}{b} \cdot \text{tg} \theta = \frac{2}{1} \text{tg} \theta \Leftrightarrow u = x = 2 \cdot \text{tg} \theta \Rightarrow x^2 = 4 \cdot \text{tg}^2 \theta. \\ dx = 2 \cdot \sec^2 \theta d\theta. \\ \sqrt{4+x^2} = a \cdot \sec \theta = 2 \cdot \sec \theta. \end{cases}$$

∴

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2 \sec^2 \theta}{(4 \text{tg}^2 \theta) \cdot (2 \sec \theta)} d\theta = \frac{1}{4} \int \frac{\sec \theta}{\text{tg}^2 \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int \frac{\left(\frac{1}{\cos \theta}\right)}{\left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right)} d\theta = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int \cos \theta \cdot (\sin \theta)^{-2} d\theta \rightarrow \begin{cases} u = \sin \theta \\ du = \cos \theta d\theta \end{cases} \dots$$

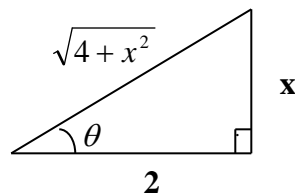
$$\dots \frac{1}{4} \int (\sin \theta)^{-2} \cdot \cos \theta d\theta = \frac{1}{4} \int u^{-2} du = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{u} = -\frac{1}{4u} + C \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{4 \cdot \sin \theta} + C.$$

- Devemos agora voltar à variável original “x” ...

$$\text{Como } x = 2 \text{tg} \theta \Leftrightarrow \text{tg} \theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{CO}{CA} = \frac{x}{2}$$

logo



$$\text{Daí, } -\frac{1}{4 \cdot \text{sen } \theta} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\text{sen } \theta} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{CO}{HI}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{HI}{CO} = -\frac{HI}{4 \cdot CO} + C = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C,$$

Portanto, $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{4+x^2}} = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$.

2)

Achar a integral $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{16-x^2}} dx \rightarrow$

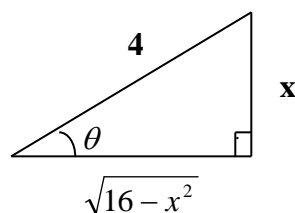
$$\begin{cases} a^2 = 16 \Leftrightarrow a = 4. & \mathbf{I} \\ b^2 = 1 \Leftrightarrow b = 1. \\ u^2 = x^2 \Leftrightarrow u = x. \\ u = \frac{a}{b} \cdot \text{sen } \theta = \frac{4}{1} \text{sen } \theta \Leftrightarrow u = x = 4 \cdot \text{sen } \theta \Rightarrow x^2 = 16 \cdot \text{sen}^2 \theta. \\ dx = 4 \cdot \text{cos } \theta d\theta. \\ \sqrt{16-x^2} = a \cdot \text{cos } \theta = 4 \cdot \text{cos } \theta. \end{cases}$$

∴

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{16-x^2}} = \int \frac{4 \text{cos } \theta}{(16 \text{sen}^2 \theta) \cdot (4 \text{cos } \theta)} d\theta = \int \frac{1}{16 \text{sen}^2 \theta} d\theta = \frac{1}{16} \int \text{cosec}^2 \theta = -\frac{1}{16} \cot \theta + C.$$

- Voltando para a variável original “x” ...

Como $x = 4 \text{sen } \theta \Leftrightarrow \text{sen } \theta = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{CO}{HI} = \frac{x}{4}$ logo



$$\text{Daí, } -\frac{1}{16} \cdot \cot g\theta = -\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = -\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\frac{CO}{CA}} = -\frac{1}{16} \cdot \frac{CA}{CO} = -\frac{CA}{16 \cdot CO} + C = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + C,$$

Portanto,
$$\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{16-x^2}} = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + C .$$

3)

Achar a integral $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx \rightarrow$ **III**
$$\begin{cases} a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2. \\ b^2 = 1 \Leftrightarrow b = 1. \\ u^2 = x^2 \Leftrightarrow u = x. \\ u = \frac{a}{b} \cdot \sec \theta = \frac{2}{1} \sec \theta \Leftrightarrow u = x = 2 \cdot \sec \theta \Rightarrow x^2 = 4 \cdot \sec^2 \theta. \\ dx = 2 \cdot \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta d\theta. \\ \sqrt{x^2-4} = a \cdot \operatorname{tg} \theta = 2 \cdot \operatorname{tg} \theta. \end{cases}$$

$$\therefore \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx = \int \frac{(4 \sec^2 \theta) \cdot (2 \cdot \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta)}{2 \cdot \operatorname{tg} \theta} d\theta = 4 \int \sec^3 \theta d\theta = 4 \int \sec \theta \cdot \sec^2 \theta d\theta \Leftrightarrow *$$

* **Por Partes** $\int u dv = uv - \int v du \dots$

$$\dots \int \sec \theta \cdot \sec^2 \theta d\theta \rightarrow \begin{cases} u = \sec \theta \rightarrow du = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta d\theta \\ dv = \sec^2 \theta d\theta \rightarrow v = \operatorname{tg} \theta \end{cases}$$

Portanto ,

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta - \int \operatorname{tg} \theta \cdot \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta d\theta$$

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta - \int \sec \theta \cdot \operatorname{tg}^2 \theta d\theta$$

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta - \int \sec \theta \cdot (\sec^2 \theta - 1) d\theta$$

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta - \int \sec^3 \theta d\theta + \int \sec \theta d\theta$$

$$\int \sec^3 \theta d\theta + \int \sec^3 \theta d\theta = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta + \int \sec \theta d\theta$$

$$2 \int \sec^3 \theta d\theta = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta + \int \sec \theta d\theta$$

$$2 \int \sec^3 \theta d\theta = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta + \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C$$

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \cdot \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2} \cdot \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C$$

*

$$\text{Voltando para } \Leftrightarrow 4 \int \sec^3 \theta d\theta = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2} \cdot \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| \right) + C \Leftrightarrow$$

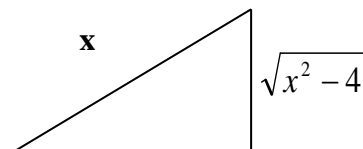
$$\Leftrightarrow 4 \int \sec^3 \theta d\theta = 2 \cdot \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta + 2 \cdot \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C .$$

\Leftrightarrow

- Voltando para a variável original “ x “ ...

$$\text{Como } x = 2 \sec \theta \Leftrightarrow \sec \theta = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos \theta} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{CA}{HI} = \frac{2}{x} ,$$

Logo temos ...



$$\frac{\angle \theta}{2}$$

Daí ,

Ver início do exercício :

$$\sqrt{x^2 - 4} = 2.tg\theta$$

$$2.\sec\theta.tg\theta + 2.\ln|\sec\theta + tg\theta| = 2.\frac{x}{2}.\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} + 2.\ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}\right| = \frac{x.\sqrt{x^2 - 4}}{2} + 2.\ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right|$$

Portanto ,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} dx = \frac{x\sqrt{x^2 - 4}}{2} + 2.\ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right| + C .$$

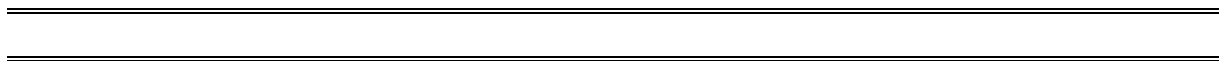
Exercícios :

▣ Achar as derivadas :

$$1) \int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$$

$$2) \int \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6} dx$$

$$3) \int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2 - 3}} dx$$



CÁLCULO III – ENGENHARIAS – AULA 5

Áreas e Integral Definida

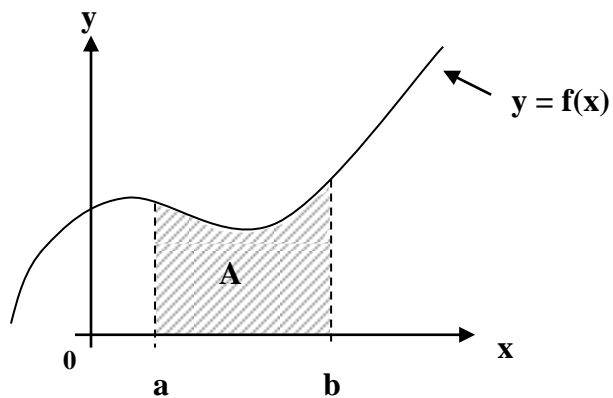
Podemos determinar a área de regiões simples como polígonos e círculos usando fórmulas geométricas conhecidas.

E para as demais regiões, como podemos calcular ???

A saída é utilizarmos o conceito de **Integral Definida**, que nada mais é do que a área da região delimitada pelo gráfico de **f**, pelo eixo **x** e pelas retas **x = a** e **x = b** onde a notação é :

$$A = \int_a^b f(x) dx, \text{ com } \begin{cases} \mathbf{a} = \text{Limite inferior de integração.} \\ \mathbf{b} = \text{Limite superior de integração.} \end{cases}$$

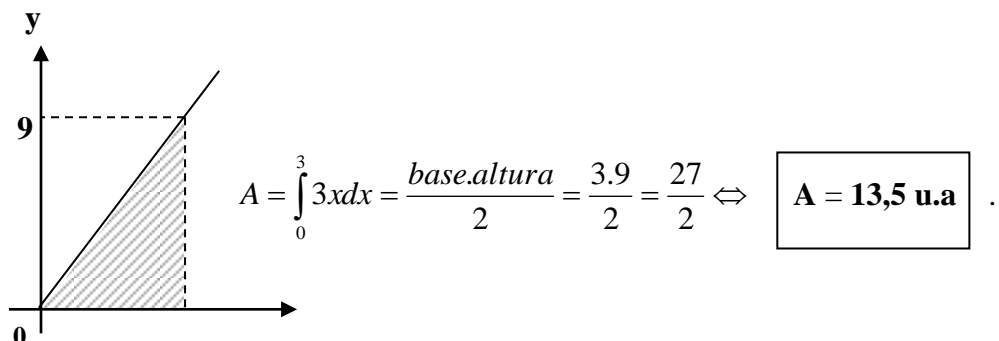
Veja o gráfico . . .



Exemplo :

Calcule a área da figura formada sob a curva da função $f(x) = 3x$ no intervalo $x \in [0, 3]$.

Resolução :

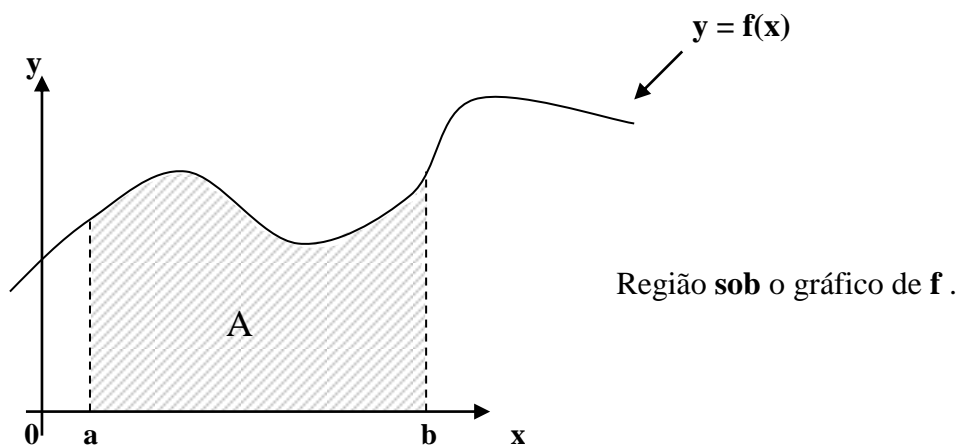


A
3 x

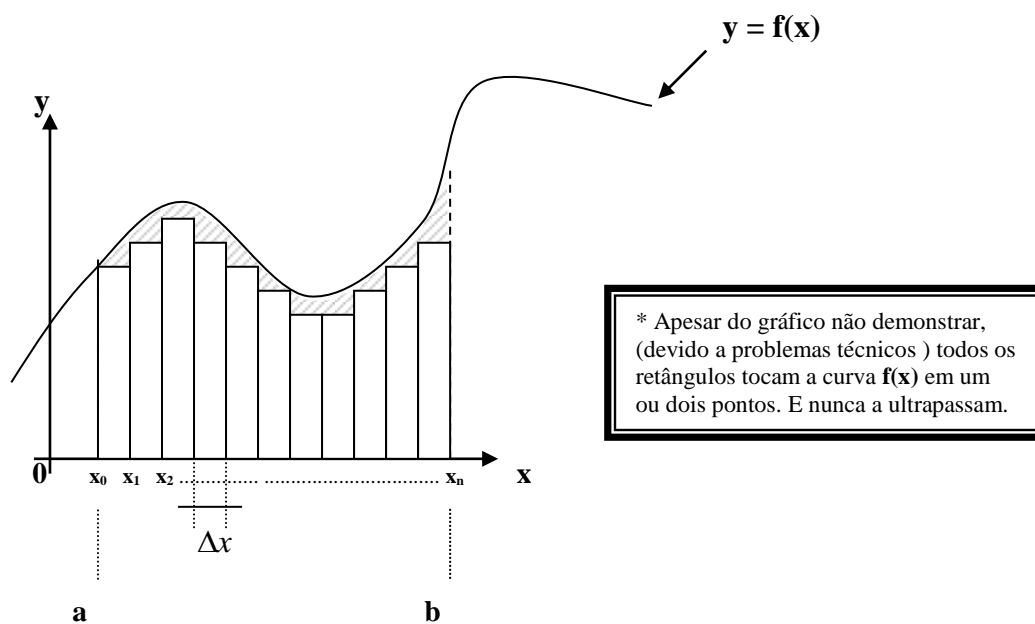
Neste exemplo, não utilizamos o conceito de integral, pois a área era um triângulo, portanto

$$A_{\Delta} = \frac{B.h}{2}.$$

Veja o desenvolvimento a seguir . . .



Vamos tentar preencher esta área com **retângulos** ...



Temos um polígono **não regular**, que “quase” preenche a área **A**, formado por **retângulos** de base Δx e altura $f(x_i)$, portanto $A_{\text{retângulo}} = f(x_i) \cdot \Delta x$.

Note que quanto **menor** Δx , **maior** o número de retângulos (**n**) e mais próximo da área sob a curva vai estar a área do polígono, logo quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos $n \rightarrow \infty$ e $A_{\text{polig.}} \rightarrow A$.

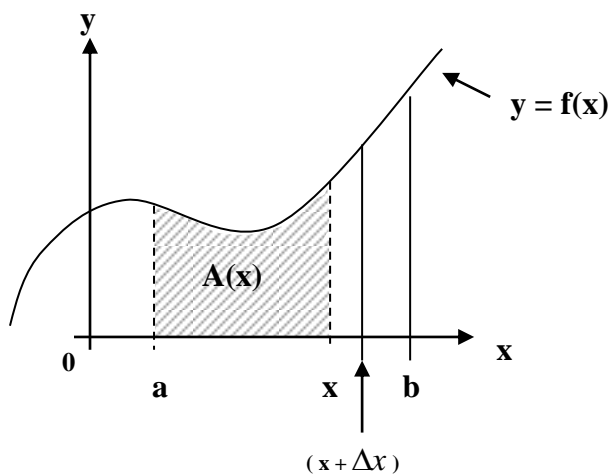
Daí, vamos expandir o conceito de **Integral Definida** para ...

$$A = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

Ou seja, a área sob a curva é a somatória das áreas dos retângulos de área $f(x_i) \cdot \Delta x$, quando $\Delta x \rightarrow 0$ e **n** (nº de retângulos) $\rightarrow \infty$.

Teorema Fundamental do Cálculo

Seja **f** uma função **contínua** em $[a, b]$ e **A(x)** a área compreendida entre **a** e **x**, temos :



Temos : $f(x) = A'(x)$ (Def. pelo limite) --- $f(x)$ é derivada da integral $A(x)$.

$A(x) = F(x) + C$ (Def. de Integral) .

$F'(x) = f(x)$ (Derivada da Integral) .

$A(a) = 0$, portanto $0 = F(a) + C \Leftrightarrow C = -F(a)$.

Daí , $A(x) = F(x) + C \Leftrightarrow A(x) = F(x) - F(a)$.

Logo $A(b) = F(b) - F(a)$, portanto temos ...

$$A(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Notação mais comum ...

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Com F a integral de f(x) .

Propriedades das Integrais Definidas

$$1) \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx ; k : \text{cte. .}$$

$$2) \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx .$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx ; a < c < b .$$

$$4) \int_a^a f(x)dx = 0 .$$

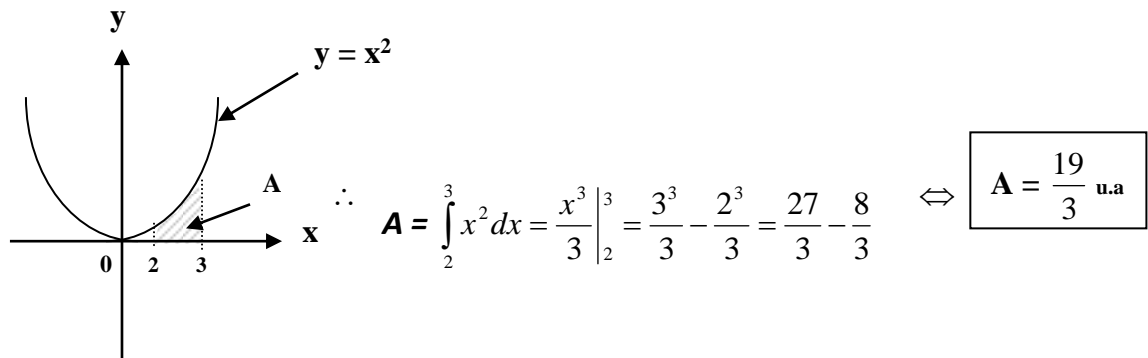
$$5) \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Cálculo de área usando o Teorema Fundamental do Cálculo

Exemplos / Exercícios :

1) Calcule a área sob a curva $y = x^2$, no intervalo $[2, 3]$.

Resolução :



2) Idem para $f(x) = 2x$, no intervalo $[0, 1]$.

Resolução :

$$A = \int_0^1 2x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1 - 0 \Leftrightarrow \boxed{A = 1 \text{ u.a}} .$$

$$3) \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{e^{-2x}}{2} \Big|_0^1 = -\frac{e^{-2.1}}{2} + \frac{e^{-2.0}}{2} = -\frac{e^{-2}}{2} + \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-2})} .$$

4)

$$\int_{-2}^3 (6x^2 - 5)dx = \int_{-2}^3 6x^2 dx + \int_{-2}^3 -5dx = 6 \int_{-2}^3 x^2 dx - \int_{-2}^3 5dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^3 - 5x \Big|_{-2}^3 = 6 \left[\frac{(3)^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \right] - [5 \cdot 3 - 5 \cdot (-2)] =$$

$$= 6 \left(9 + \frac{8}{3} \right) - (15 + 10) = 54 + 16 - 25 = 70 - 25 = \boxed{45} .$$

$$5) \int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}} dx =$$

$$6) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \operatorname{sen} 2x)^3 \cdot \cos 2x dx =$$

$$7) \int_1^9 \frac{2t^2 + t^2 \cdot \sqrt{t} - 1}{t^2} dt =$$

$$8) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}} dx =$$

$$9) \int_0^2 f(x) dx \text{ onde } f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ x^5 & \text{para } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} .$$

$$10) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \text{ onde } f(x) = \begin{cases} x & ; & -\pi \leq x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{para } 0 < x \leq \pi \end{cases} .$$

CÁLCULO III – ENGENHARIAS – AULA 6

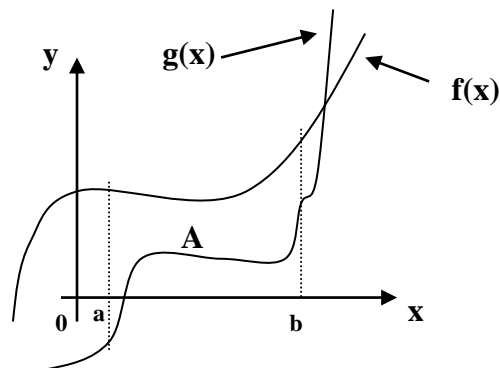
Aplicações da Integral Definida

Já vimos que a integral definida pode ser considerada como a área **sob** a curva de **f(x)** num intervalo **[a , b]**.

Vamos ver agora outras aplicações . . .

- **Áreas entre curvas** (ou área de uma região delimitada por dois gráficos)

Tomemos **duas** curvas **y = f(x)** e **y = g(x)** onde **A** é a área delimitada pelas curvas entre as retas **x = a** e **x = b**, com **f** e **g** **contínuas** em **[a , b]** e **f(x) ≥ g(x)**, veja a figura ...



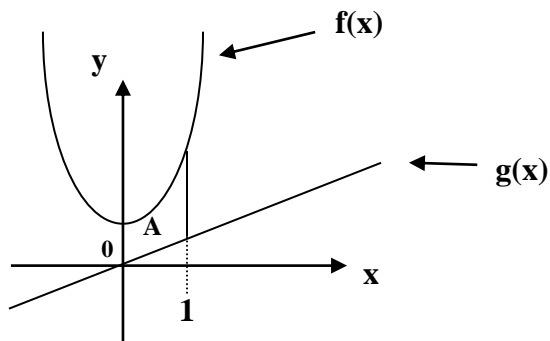
Analogamente ao que já estudamos, temos $A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - g(x_i)] \Delta x$, quando $n \rightarrow \infty$.

Logo temos ...

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Exemplos :

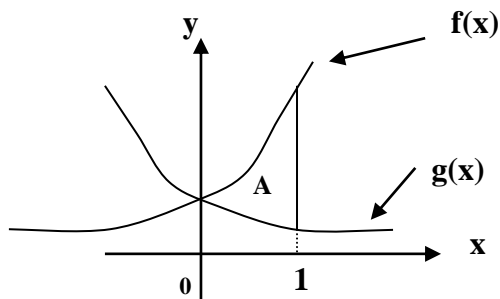
1) Ache a área delimitada pelos gráficos de $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = x$ para $0 \leq x \leq 1$.

Resolução :

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 [(x^2 + 2) - x] dx = \int_0^1 [x^2 + 2 - x] dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 =$$

$$= \frac{2 - 3 + 12}{6} \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{11}{6} \text{ u.a}} .$$

2) Idem para $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-x}$ em $[0, 1]$.

Resolução :

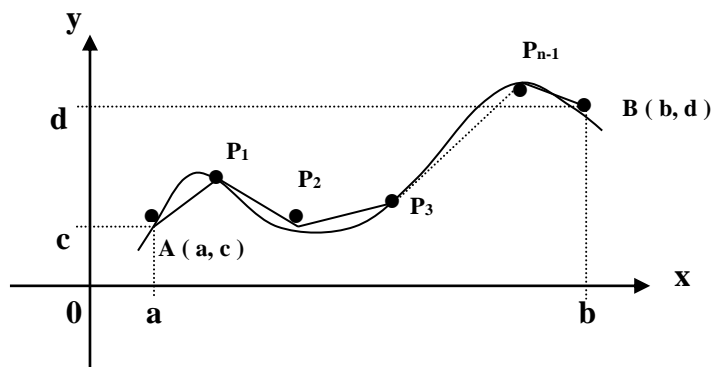
$$\mathbf{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 [(e^x - e^{-x})] dx = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 e^{-x} dx = e^x \Big|_0^1 + e^{-x} \Big|_0^1 = (e^1 - e^0) + (e^{-1} - e^0) =$$

$$= e - 1 + e^{-1} - 1 = e + \frac{1}{e} - 2 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{A} = \frac{e^2 - 2e + 1}{e} \mathbf{u.a}} .$$

• Comprimento de Arco

Seja um arco **AB**, definimos o seu comprimento como o **limite** da soma dos comprimentos das cordas consecutivas $\overline{AP_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \dots + \overline{P_{n-1}B}$. Quando o **número** de cordas (**n**) tende ao **infinito**, seu **comprimento** tende a **zero**, daí a **somatória** tende ao **comprimento do arco** .

Veja o gráfico ...



Se **A (a, c)** e **B (b, d)** são dois pontos da curva **F(x,y) = 0**, o comprimento do arco **AB** é dado por :

$$\boxed{\mathbf{S} = \int_{AB} dS = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \text{ou} \quad \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy}$$

Variação em x ou Variação em y

Se **A**, dado por **u = u1** e **B**, dado por **u = u2** , são pontos de uma curva definida pelas equações paramétricas **x = f(u)** e **y = g(u)**, o comprimento do arco **AB** é dado por :

$$S = \int_{AB} dS = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$$

Exemplos :

1) Ache o comprimento do arco da curva $y = x^{\frac{3}{2}}$ de $x = 0$ a $x = 5$.

Resolução :

Como temos a variação em $x \dots$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{9}{4}x$$

Dáí,

$$S = \int_{AB} dS = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \int_0^5 \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx \rightarrow \begin{cases} u = 1 + \frac{9x}{4} \\ du = \frac{9}{4} dx \end{cases} \therefore$$

$$\therefore \frac{4}{9} \int_0^5 \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{9}{4} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^5 = \frac{8}{27} \cdot \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^5 = \frac{8}{27} \cdot \left[\left(1 + \frac{9 \cdot 5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + \frac{9 \cdot 0}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right] =$$

$$= \frac{8}{27} \cdot \left[\left(1 + \frac{45}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - (1+0)^{\frac{3}{2}} \right] \Leftrightarrow \boxed{S = \frac{8}{27} \cdot \left[\left(\frac{49}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \text{ u.c}} \Leftrightarrow \boxed{S = \frac{335}{27} \text{ u.c}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbf{S} \cong 12,4074 \mathbf{u.c}} .$$

2) Idem para $\mathbf{x} = 3y^{\frac{3}{2}} - 1$ de $\mathbf{y} = 0$ a $\mathbf{y} = 4$.

Resolução :

Como temos a variação em \mathbf{y} . . .

$$\frac{dx}{dy} = \frac{9}{2}y^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \left(\frac{9}{2}y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{81}{4}y$$

Daí ,

$$\mathbf{S} = \int_{AB} dS = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{81y}{4}} dy = \int_0^4 \left(1 + \frac{81y}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dy \rightarrow \begin{cases} u = 1 + \frac{81y}{4} \\ du = \frac{81}{4} dy \end{cases} \therefore$$

$$\therefore \frac{4}{81} \cdot \int_0^4 \left(1 + \frac{81y}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{81}{4} dy = \frac{4}{81} \cdot \left. \frac{\left(1 + \frac{81y}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^4 = \frac{8}{243} \cdot \left(1 + \frac{81y}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{8}{243} \cdot \left[\left(1 + \frac{81 \cdot 4}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + \frac{81 \cdot 0}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right] =$$

$$= \frac{8}{243} \left[(1+81)^{\frac{3}{2}} - (1+0)^{\frac{3}{2}} \right] \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{S} = \frac{8}{243} \left[82^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \text{ u.c}} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{S} \cong 24,4129 \text{ u.c}} .$$

3) Idem para a curva $\mathbf{x} = \mathbf{t}^2$, $\mathbf{y} = \mathbf{t}^3$ de $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{t} = \mathbf{4}$.

Resolução :

- Como temos a curva definida parametricamente . . .

$$\frac{dx}{dt} = 2t \rightarrow \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 4t^2 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 \rightarrow \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 9t^4$$

Daí . . .

$$\mathbf{S} = \int_{AB} dS = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = \int_0^4 \sqrt{4t^2 + 9t^4} dt = \int_0^4 \sqrt{t^2(4 + 9t^2)} dt = \int_0^4 t \cdot \sqrt{4 + 9t^2} dt =$$

$$= \int_0^4 (4 + 9t^2)^{\frac{1}{2}} \cdot t dt \rightarrow \begin{cases} u = 4 + 9t^2 \\ du = 18t dt \end{cases} \quad \therefore \text{ temos ...}$$

$$\frac{1}{18} \int_0^4 (4+9t^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 18t dt = \frac{1}{18} \cdot \frac{(4+9t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{1}{27} \cdot (4+9t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{1}{27} \left[(4+9 \cdot 4^2)^{\frac{3}{2}} - (4+9 \cdot 0^2)^{\frac{3}{2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{27} \left[(4+144)^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{1}{27} \left(148^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right) \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{S} \cong 66,3888 \text{ u.c.}}$$

• **Área de uma superfície de Sólido de Revolução**

- A **Área de uma superfície** gerada pela rotação em torno do eixo **Ox** de uma curva regular $y = f(x)$, entre os pontos $x = a$ e $x = b$ é expressa pela fórmula :

$$\mathbf{S_x} = 2\pi \int_{AB} y dS = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \text{ou} \quad 2\pi \int_c^d y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

A **Área de uma superfície** gerada pela rotação em torno do eixo **Oy** de uma curva regular $y = f(x)$, entre os pontos $x = a$ e $x = b$ é expressa pela fórmula :

$$\mathbf{S_y} = 2\pi \int_{AB} x dS = 2\pi \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \text{ou} \quad 2\pi \int_c^d x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

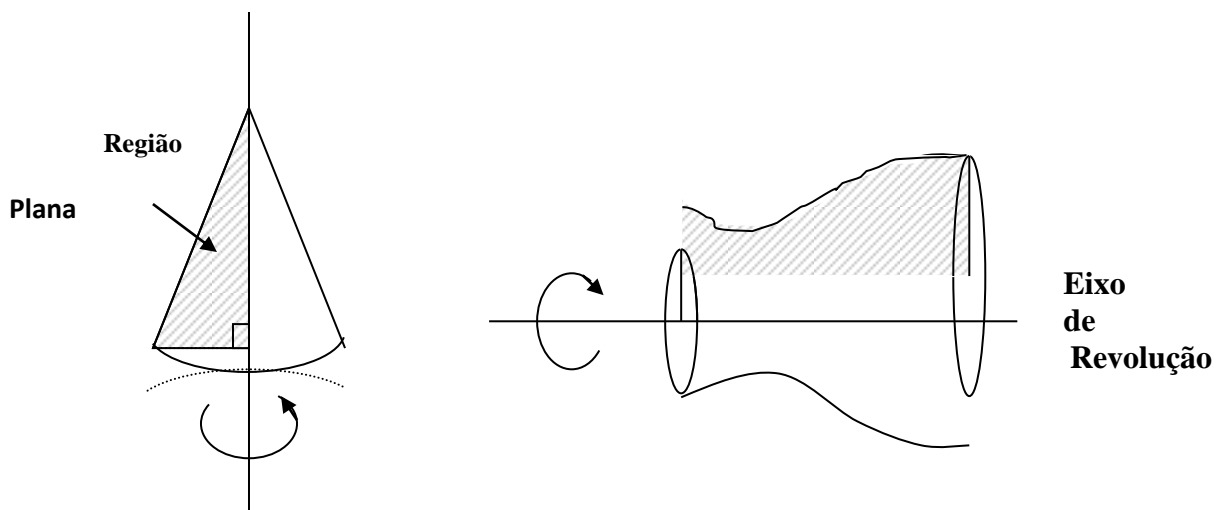
Obs. : Para as equações **Paramétricas** $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ = \mathbf{g}(\mathbf{u}) \end{array} \right.$ temos ...

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y dS = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} y \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$$

$$S_y = 2\pi \int_{AB} x dS = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} x \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$$

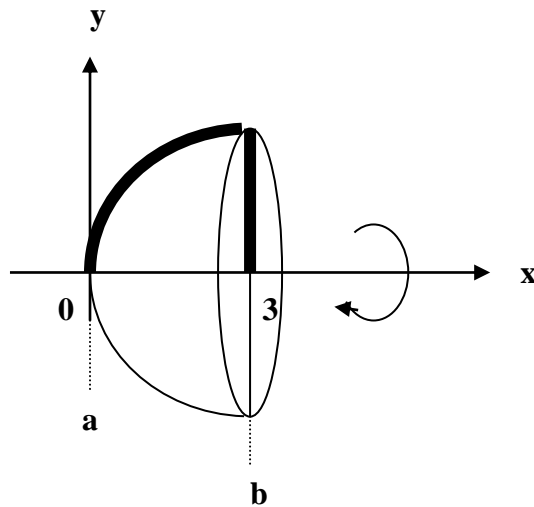
- **Sólido de Revolução** : Obtem-se fazendo uma região plana revolver em torno de uma Retas ou eixo de revolução. (**Veja figura**)*

* **Eixo de Revolução**



Exemplos :

1) Ache a área da superfície gerada pela revolução, em torno do eixo **Ox**, do arco da parábola $y^2 = 12x$, de $x = 0$ a $x = 3$.

Resolução :**1º Modo :**

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y dS = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet y^2 = 12x \Leftrightarrow y = \sqrt{12x} \\ \bullet \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{12x}} \cdot 12 = \frac{6}{\sqrt{12x}} \cdot \frac{\sqrt{12x}}{\sqrt{12x}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3x}}{12x} \Leftrightarrow \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3x}}{x} \therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3x}}{x}\right)^2 = \frac{3x}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{3}{x} .$$

Daí . . .

$$\mathbf{S}_x = 2\pi \int_0^3 y \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{x}} dx = 2\pi \int_0^3 \sqrt{12x} \cdot \sqrt{\frac{x+3}{x}} dx = 2\pi \int_0^3 \sqrt{12x \cdot \frac{x+3}{x}} dx = 2\pi \int_0^3 \sqrt{12 \cdot (x+3)} dx =$$

$$= 2\pi \int_0^3 \sqrt{12x + 36} dx = 2\pi \int_0^3 \sqrt{4(3x+9)} dx = 2\pi \int_0^3 2 \cdot \sqrt{3x+9} dx = 4\pi \int_0^3 (3x+9)^{\frac{1}{2}} dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} u = 3x + 9 \\ du = 3dx \end{cases} \therefore \mathbf{S}_x = \frac{4\pi}{3} \int_0^3 (3x+9)^{\frac{1}{2}} \cdot 3dx = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{(3x+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = \frac{8\pi}{9} \cdot (3x+9)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 =$$

$$= \frac{8\pi}{9} \left[(3 \cdot 3 + 9)^{\frac{3}{2}} - (3 \cdot 0 + 9)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{8\pi}{9} \left[18^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}} \right] \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{S}_x \cong 43,8822 \pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}} .$$

2º Modo :

$$\mathbf{S}_x = 2\pi \int_{AB} y dS = 2\pi \int_c^d y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} dy \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet y^2 = 12x \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{12} \end{array} \right.$$

$$\bullet \frac{dx}{dy} = \frac{2y}{12} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{6} \Leftrightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{y^2}{36}.$$

Dáí . . .

$$\mathbf{S_x} = 2\pi \int_0^6 y \cdot \sqrt{1 + \frac{y^2}{36}} dy = 2\pi \int_0^6 y \cdot \sqrt{\frac{36 + y^2}{36}} dy = 2\pi \int_0^6 y \cdot \frac{\sqrt{36 + y^2}}{6} dy = \frac{2\pi}{6} \int_0^6 y \cdot \sqrt{36 + y^2} dy =$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_0^6 (36 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot y dy \rightarrow \begin{cases} u = y^2 + 36 \\ du = 2y \end{cases}$$

$$\therefore \mathbf{S_x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \int_0^6 (36 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y dy = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{(36 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^6 = \frac{\pi}{9} \cdot (36 + y^2)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^6 =$$

$$= \frac{\pi}{9} \left[(36 + 6^2)^{\frac{3}{2}} - (36 + 0^2)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi}{9} \left[72^{\frac{3}{2}} - 36^{\frac{3}{2}} \right] \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{S_x} \cong 43,8822 \pi \mathbf{u. a}}.$$

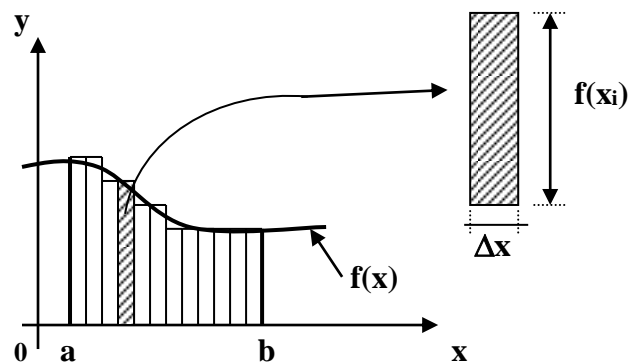
$$2) \text{ Idem para a cardióide } \begin{cases} \mathbf{x} = 2\cos\theta - \cos 2\theta \\ \mathbf{y} = 2\sen\theta - \sen 2\theta \end{cases} \quad \text{para } \theta \in [0, \pi].$$

CÁLCULO III – ENGENHARIAS – AULA 6

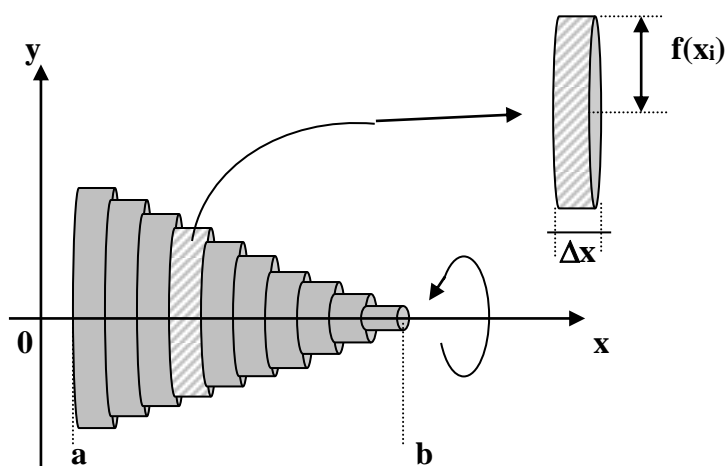
VOLUME DO SÓLIDO DE REVOLUÇÃO (Método do Disco)

Abaixo temos o esquema de como calcularemos o volume de um sólido de revolução.

- 1) Seja a função $f(x)$ geratriz, usamos o conceito, já visto, de integral definida , ou seja, **aproximação por n retângulos** .

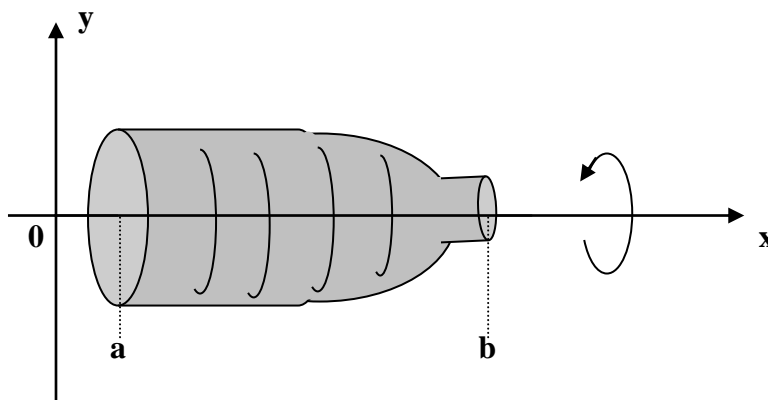


- 2) Ao rotacionarmos cada retângulo em torno eixo $0x$, temos vários **discos (cilindros circulares)** com volume $V = \text{área da base} \times \text{Altura} = \{ \pi \cdot [f(x_i)]^2 \} \cdot \Delta x$ onde $f(x_i) = \text{raio}$.



Somando-se o volume de cada disco temos o valor aproximado do volume do sólido de revolução, ou seja, **aproximação por n discos**.

- 3) Usando a lógica dos infinitésimos ($\Delta x \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$) temos o volume do sólido estudado.



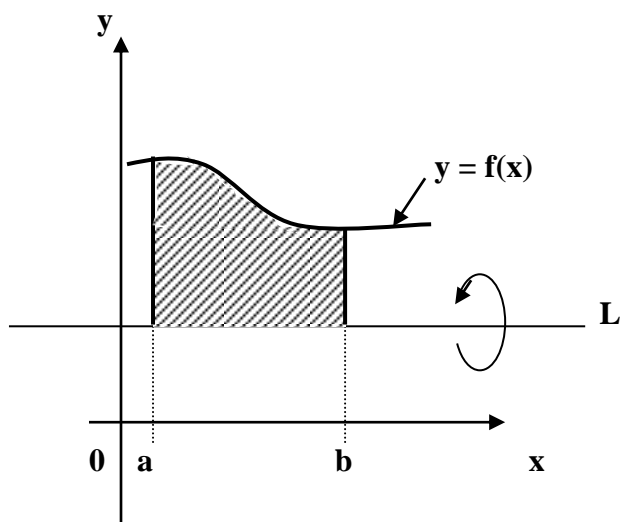
Logo, temos, o **Volume do sólido de revolução**, em torno do eixo 0_x , da região entre o gráfico de f e os eixos $x \in [a, b]$ como sendo :

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

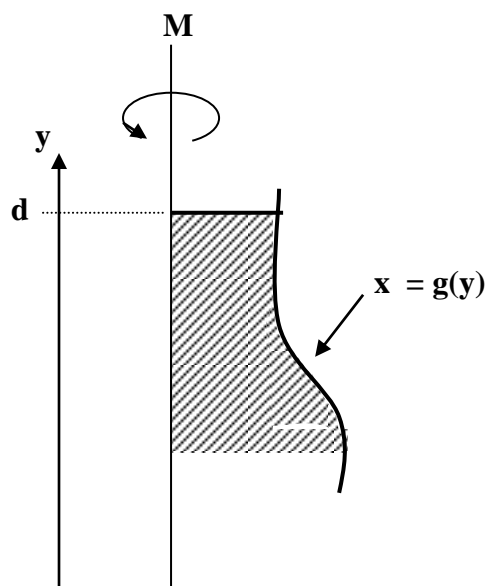
Analogamente, ao rotacionarmos em torno do eixo 0_y , temos o **Volume do sólido de revolução**, da região entre o gráfico de g e os eixos $y \in [c, d]$ como sendo :

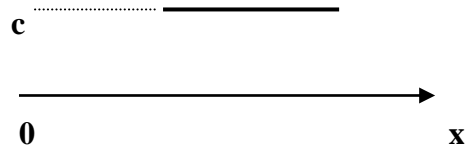
$$V_y = \pi \cdot \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

Obs. : Se a rotação se efetua ao redor de uma **reta paralela** a um dos eixos coordenados, temos :



$$V_x = \pi \cdot \int_a^b [f(x) - L]^2 dx$$





$$V_y = \pi \int_c^d [g(y) - M]^2 dy$$

MÉTODO DA ARRUELA (ou entre duas funções $f(x)$ e $g(x)$)

Usado quando possui um “buraco”. A demonstração é análoga ao **método do disco** onde $f(x)$ e $g(x)$ são os raios que delimitam o sólido **externa** e **internamente**, daí :

$$V_x = \pi \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx$$

Rotação em torno do eixo 0_x

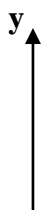
$$V_y = \pi \int_c^d \{ [h(y)]^2 - [l(y)]^2 \} dy$$

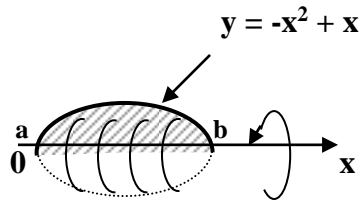
Rotação em torno do eixo 0_y

Exemplos :

1) Determine volume do sólido formado pela revolução em torno do eixo x , da região delimitada pelo gráfico de $f(x) = -x^2 + x$ e pelo eixo x .

Resolução :



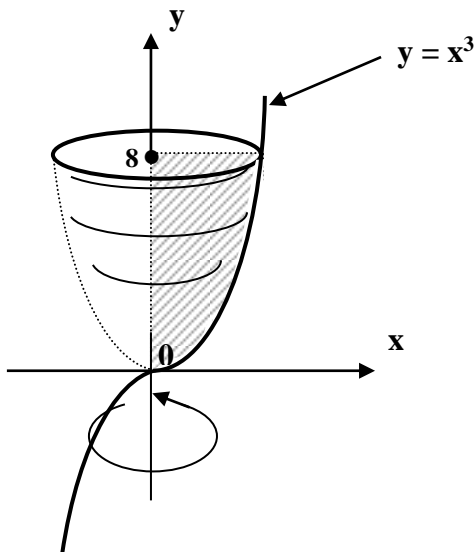


$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \Rightarrow \{ -x^2 + x \Leftrightarrow x \cdot (-x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow a = 0 \\ \text{ou} \\ -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^1 [-x^2 + x]^2 dx = \pi \int_0^1 [x - x^2]^2 dx = \pi \int_0^1 [x^2 - 2x^3 + x^4] dx = \\ &= \pi \left[\int_0^1 x^2 dx - 2 \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 x^4 dx \right] = \pi \left[\left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 - 2 \left(\frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 \right] = \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right] = \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right] \Leftrightarrow \boxed{V_x = \frac{\pi}{30} \text{ u.v}} \end{aligned}$$

2) Idem para $y = x^3$ limitada por $y = 8$ e $x = 0$, rotação em torno do eixo $0y$.

Resolução :



$$V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

$$y = f(x) = x^3 \Leftrightarrow x = g(y) = \sqrt[3]{y}$$

portanto ...

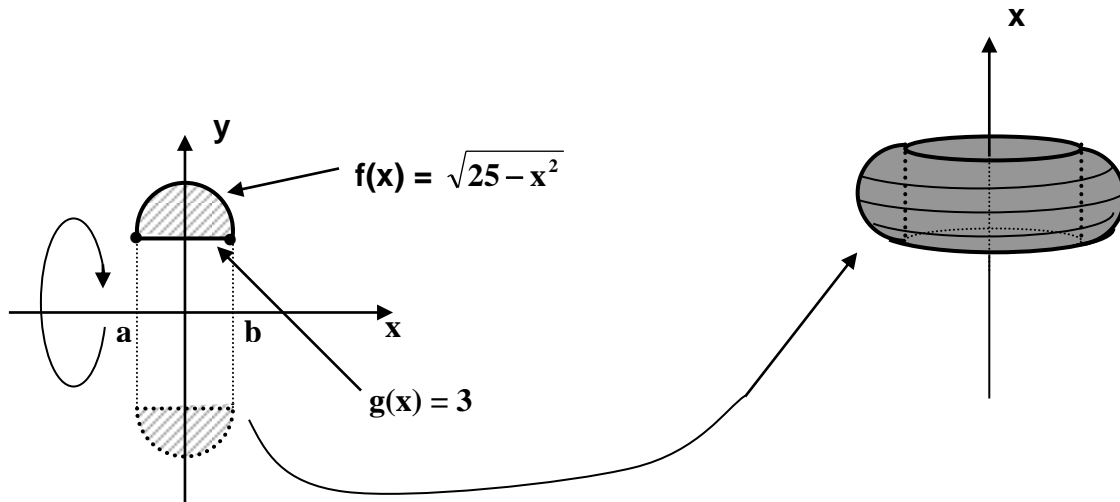
$$V_y = \pi \int_0^8 [\sqrt[3]{y}]^2 dy = \pi \int_0^8 [y^{\frac{1}{3}}]^2 dy =$$

$$= \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \left[y^{\frac{5}{3}} \right]_0^8 = \pi \left[8^{\frac{5}{3}} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_y \cong 19,20\pi \text{ u.v}}$$

3) Calcule o volume do sólido gerado pela revolução, em torno do eixo 0_x , da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ e $g(x) = 3$. (Método da arruela)

Resolução :



• Cálculo de a e b

$$f(x) = g(x) = 3 \Rightarrow \sqrt{25 - x^2} = 3 \Leftrightarrow 25 - x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a = -4 \\ e \\ x_2 = b = 4 \end{cases} .$$

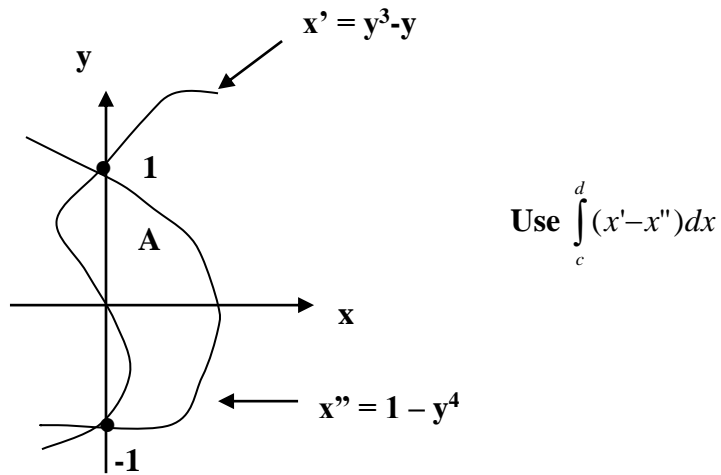
Portanto ...

$$\begin{aligned}
V_x &= \pi \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx = \pi \int_{-4}^4 \{ [\sqrt{25-x^2}]^2 - [3]^2 \} dx = \\
&= \pi \int_{-4}^4 \{ 25 - x^2 - 9 \} dx = \pi \int_{-4}^4 (16 - x^2) dx = \pi \left[(16x) \Big|_{-4}^4 - \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-4}^4 \right] = \\
&= \pi \left\{ [16 \cdot (4) - 16 \cdot (-4)] - \left[\frac{4^3}{3} - \frac{(-4)^3}{3} \right] \right\} = \pi \left\{ [64 + 64] - \left[\frac{64}{3} + \frac{64}{3} \right] \right\} = \\
&= \pi \left(128 - \frac{128}{3} \right) = \pi \cdot \frac{384 - 128}{3} = \pi \cdot \frac{256}{3} \Leftrightarrow \boxed{V_x \cong 85,33\pi \text{ u.v}}
\end{aligned}$$

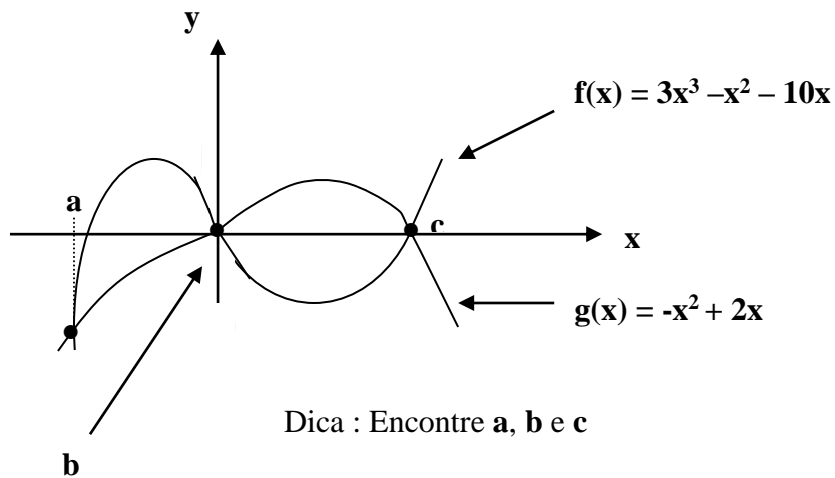
CÁLCULO III – ENGENHARIAS – AULA 7

Exercícios :

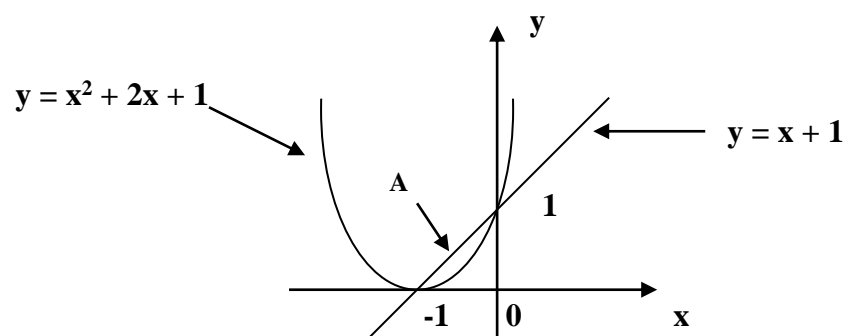
1) Calcule a área da região A.



2) Idem para :



3) Idem para :



4) Encontre o comprimento da curva $y = 5x - 2$; $-2 \leq x \leq 2$.

5) Idem para $x = y^{\frac{3}{2}}$ de $P(0, 0)$ até $Q(8, 4)$; $y \in [0, 4]$.

{

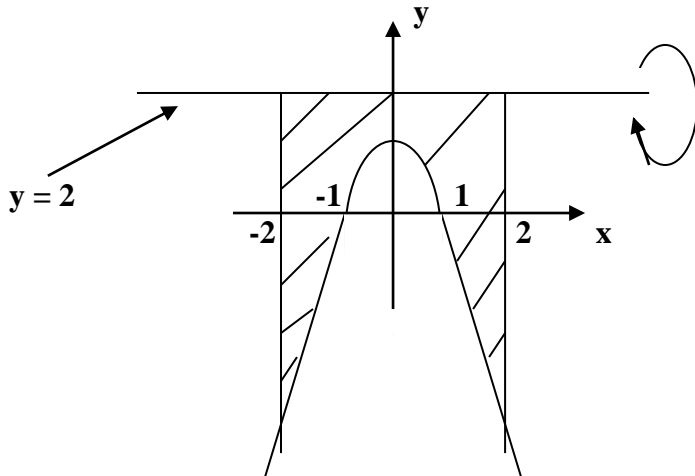
- 6) Idem para a hipociclóide $x = 4\text{sen}^3t$; $t \in [0, 2\pi]$.
 $y = 4\text{cos}^3t$

- 7) Calcular a área obtida com a revolução, em torno do eixo O_x do arco da parábola $y^2 = 8x$;
 $1 \leq x \leq 12$.

8) Idem para $x = \sqrt{y}$; $1 \leq y \leq 4$; rotação em O_y .

9) Idem para $y = \sqrt[3]{x}$; $1 \leq y \leq 2$; rotação em O_y .

- 10) Calcule o volume do corpo criado ao girarmos, ao redor do eixo O_x , da superfície compreendida entre as parábolas $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.
- 11) Calcule o volume do sólido gerado pela revolução, em torno da reta $y = 2$, da região limitada por $y = 1 - x^2$, $x = -2$, $x = 2$ e $y = 2$.



- 12) Encontrar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo O_x , da região limitada por $[f(x)]^2 = 16x$ e $g(x) = 4x$.
- 13) Um tanque, na asa de um jato, tem como modelo, o sólido gerado pela revolução, em torno do eixo O_x , da região delimitada pelo gráfico $y = \frac{1}{8} \cdot x^2 \cdot \sqrt{2-x}$ e pelo eixo x , x e y são dados em metros. Qual o volume do tanque?

Obs. : Considere $0 \leq x \leq 2$.

Respostas :

1) $A = 1,6 \text{ u.a}$

2) $A = 24 \text{ u.a}$

3) $A = \frac{1}{6} \text{ u.a}$

4) $S \cong 20,40 \text{ u.c}$

5) $S \cong 9,073 \text{ u.c}$

6) $S = 0 \text{ u.c}$

7) $S_x \cong 177,96 \pi \text{ u.a}$

8) $S_y \cong 9,819 \pi \text{ u.a}$

9) $S_y \cong 63,497 \pi \text{ u.a}$

10) $V_x = \frac{3\pi}{10} \text{ u.v}$

11) $V_x = \frac{412\pi}{15} \text{ u.v}$

12) $V_x = \frac{8\pi}{3} \text{ u.v}$

13) $V = 0,0033 \pi \text{ m}^3 \cong 0,1047 \text{ m}^3 \cong 104,71 \text{ litros}$

<u>CÁLCULO III</u> – ENGENHARIAS – <u>AULA 8</u>

INTEGRAIS DUPLAS

Podemos estender a noção de integral definida para funções de **duas**, ou **mais**, variáveis.

Analogamente, a integral para uma variável definia a área sob uma curva, as integrais de funções de duas variáveis determinam volumes sob “ curvas “, mas podemos também calcular áreas usando a integral dupla.

Definição : Seja **f** uma função de duas variáveis, contínua e não-negativa numa região $\mathfrak{R} \in$ plano **xy**, então o volume do sólido compreendido entre a superfície $z = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ e a região \mathfrak{R} é definido por :

$$\mathbf{V} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \cdot \Delta A_k$$

n : Quantidade de sub-retângulos

Veja a figura :

Obs. : Caso f apresente tanto valores **positivos** quanto valores **negativos** em \mathfrak{R} , o limite apresentado **NÃO REPRESENTA** o volume entre \mathfrak{R} e a superfície acima do plano xy , mas sim a **diferença** de volumes entre elas, podemos então generalizar . . .

$$\mathbf{V} = \iint_R f(x, y) dA$$

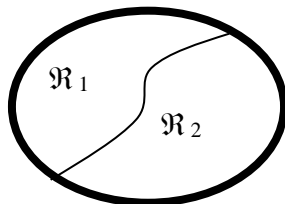
• Se f possui valores **positivos** e **negativos** em \mathfrak{R} , então um valor **positivo** para a integral dupla de f em \mathfrak{R} significa que há mais volume **acima** do que abaixo de \mathfrak{R} . Um valor **negativo** indica o **contrário** e **zero** indica volumes **iguais** acima e abaixo de \mathfrak{R} .

Propriedades :

$$\text{I) } \iint_R c \cdot f(x, y) dA = c \cdot \iint_R f(x, y) dA .$$

$$\text{II) } \iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA \pm \iint_R g(x, y) dA .$$

III) Se \mathfrak{R} é a união de duas regiões não-superpostas \mathfrak{R}_1 e \mathfrak{R}_2



The diagram shows a large oval-shaped region labeled \mathfrak{R} . A curved line divides this region into two smaller, non-overlapping regions labeled \mathfrak{R}_1 and \mathfrak{R}_2 .

$$\therefore \iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA \pm \iint_{R_2} f(x, y) dA .$$

IV) Se $f(x, y) \geq 0$ em toda \mathfrak{R} , então $\iint_R f(x, y) dA \geq 0$.

Calculando as integrais duplas para Região \mathfrak{R} retangular

Adotando como **Integrais Parciais** $\int_a^b f(x, y) dx$ e $\int_c^d f(x, y) dy$ em relação a **x** e **y** respectivamente, integramos a **primeira** com **y** fixo e a **segunda** com **x** fixo, vejamos os exemplos . . .

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 xy^2 dx = y^2 \int_0^1 x dx = y^2 \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = y^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{y^2}{2} \\ \int_0^1 xy^2 dy = x \int_0^1 y^2 dy = x \left(\frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = x \cdot \frac{1}{3} = \frac{x}{3} \end{array} \right.$$

O processo acima é chamado **Integração Iterada** (ou repetida), usaremos tal processo para calcular as integrais duplas, daí . . .

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

Integrais Iteradas

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

$$\begin{aligned}
 2) \int_0^3 \int_1^2 (1+8xy) dy dx &= \int_0^3 \left[\int_1^2 (1+8xy) dy \right] dx = \int_0^3 \left[\left(y + 8x \frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^2 \right] dx = \int_0^3 \left[(y + 4xy^2) \Big|_1^2 \right] dx = \\
 &= \int_0^3 [(2 + 4x \cdot 4) - (1 + 4x)] dx = \int_0^3 [2 + 16x - 1 - 4x] dx = \int_0^3 (12x + 1) dx = (6x^2 + x) \Big|_0^3 = \\
 &= (6 \cdot 3^2 + 3) = 54 + 3 = \boxed{57}.
 \end{aligned}$$

$$3) \int_1^2 \int_0^3 (1+8xy) dx dy =$$



Veja o teorema abaixo :

▣ Seja \mathcal{R} o **Retângulo** definido pelas desigualdades $\mathbf{a \leq x \leq b}$, $\mathbf{c \leq y \leq d}$; se $\mathbf{f(x,y)}$ for contínua nesse retângulo, então :

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

▣ **Aplicação do teorema :**

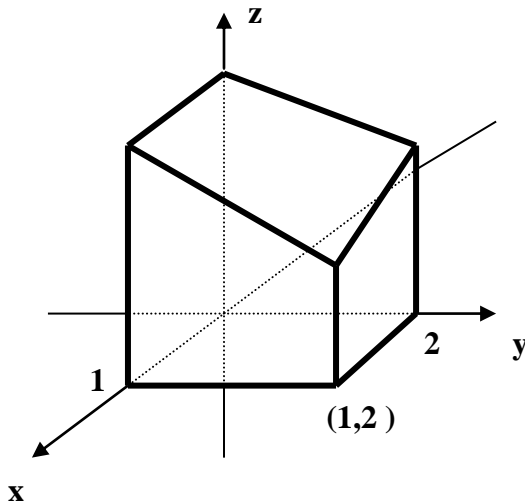
Calcule $\iint_R y^2 x dA$ no retângulo $\mathcal{R} = \{ (x, y) : -3 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \}$.

Resolução :

$$\iint_R y^2 x dA = \int_{-3}^2 \int_0^1 (y^2 x) dy dx = \int_0^2 \int_{-3}^1 (y^2 x) dx dy = \int_0^2 \left[\int_{-3}^1 (y^2 x) dx \right] dy = -\frac{5}{6} .$$

- 4) Use a integral dupla para achar o volume do sólido limitado acima pelo plano $z = 4 - x - y$ e abaixo pelo retângulo $\mathfrak{R} = [0, 1] \times [0, 2]$.

Resolução :



$$\begin{aligned} V &= \iint_R (4 - x - y) dA = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y) dx dy = \int_0^2 \left[\int_0^1 (4 - x - y) dx \right] dy = \int_0^2 \left[\left(4x - \frac{x^2}{2} - xy \right) \Big|_0^1 \right] dy = \\ &= \int_0^2 \left(4 - \frac{1}{2} - y \right) dy = \int_0^2 \left(\frac{7}{2} - y \right) dy = \left(\frac{7}{2} y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{7 \cdot 2}{2} - \frac{2^2}{2} = 7 - 2 \Leftrightarrow \boxed{V = 5 \text{ u.v.}} . \end{aligned}$$

Exercícios :

1) Calcule as integrais iteradas :

$$\text{a) } \int_0^1 \int_0^2 (x+3) dy dx$$

$$\text{b) } \int_0^{\ln 3} \int_0^{2\ln 2} (e^{x+y}) dy dx$$

$$\text{c) } \int_{-1}^2 \int_0^4 (2x + 6x^2 y) dy dx$$

2) Calcule as integrais duplas na região retangular \mathfrak{R} .

$$\text{a) } \iint_R 4xy^3 dA; \mathfrak{R} = \{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) : -1 \leq \mathbf{x} \leq 1, -2 \leq \mathbf{y} \leq 2 \} .$$

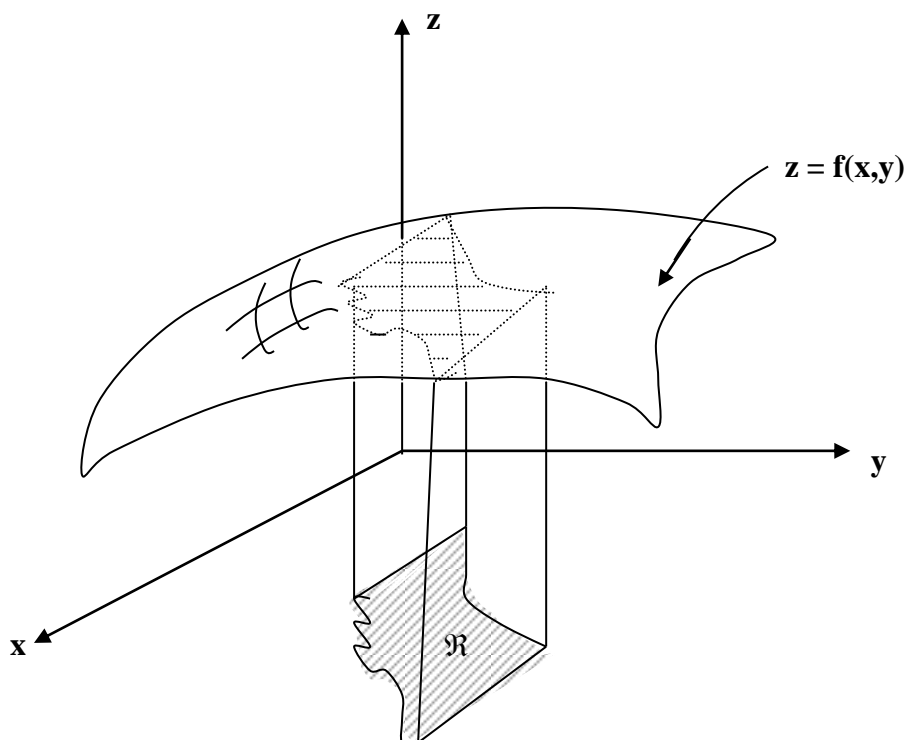
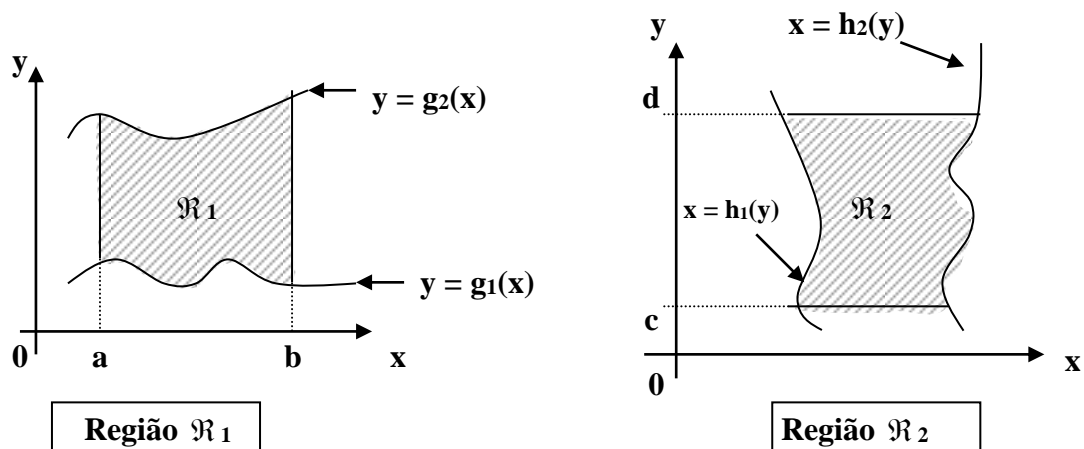
$$\text{b) } \iint_R x \sqrt{1-x^2} dA; \mathfrak{R} = \{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) : 0 \leq \mathbf{x} \leq 1, 2 \leq \mathbf{y} \leq 3 \} .$$

3) O volume sob o plano $z = 2\mathbf{x} + \mathbf{y}$ e acima do retângulo $\mathfrak{R} = \{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) : 3 \leq \mathbf{x} \leq 5, 1 \leq \mathbf{y} \leq 2 \}$.

CÁLCULO III – ENGENHARIAS – AULA 9

Calculando as integrais duplas para Região \mathcal{R} não – retangular

Sejam as regiões \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 no plano xy onde \mathcal{R} é não – retangular .



Temos :

Teorema

1) Se \mathcal{R} é uma região do tipo \mathcal{R}_1 na qual $f(x,y)$ é contínua, então :

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

2) Se \mathcal{R} é uma região do tipo \mathcal{R}_2 na qual $f(x,y)$ é contínua, então :

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Exemplos :

$$\begin{aligned} 1) \text{ Calcule } \int_1^3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} (2y \cos x) dx dy &= \int_1^3 \left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} (2y \cos x) dx \right] dy = \int_1^3 \left[(2y \operatorname{sen} x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} \right] dy = \\ &= \int_1^3 \left[(2y \operatorname{sen} y^2) - \left(2y \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) \right] dy = \int_1^3 \left(2y \operatorname{sen} y^2 - 2y \frac{1}{2} \right) dy = \int_1^3 (-y + 2y \operatorname{sen} y^2) dy = \\ &= - \int_1^3 y dy + \int_1^3 2y \operatorname{sen} y^2 dy \stackrel{**}{=} - \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^3 + (-\cos y^2) \Big|_1^3 = - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) - (\cos 3^2 - \cos 1^2) = \\ &= -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} - \cos 9 + \cos 1 = -4 - \cos 9 + \cos 1 \cong \boxed{-3,987} . \end{aligned}$$

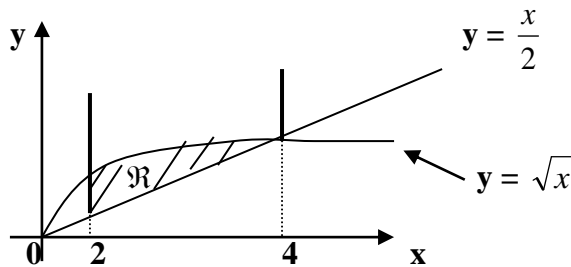
**

$$\left\{ \begin{array}{l} u = y^2 \end{array} \right.$$

$$du = 2y \, dy \quad \therefore \int_1^3 \operatorname{sen} y^2 2y \, dy = (-\cos y^2) \Big|_1^3$$

2) Calcule $\iint_R xy \, dA$ na região entre $y = \frac{x}{2}$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ e $x = 4$.

Resolução :



Obs. : Este desenho refere-se somente ao plano xy .

■ Considerando \mathfrak{R} do tipo \mathfrak{R}_1 temos . . . $\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx$.

$$\text{■ Portanto . . . } \iint_R xy \, dA = \int_2^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} (xy) \, dy \, dx = \int_2^4 \left[\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} (xy) \, dy \right] dx = \int_2^4 \left[x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} \right] dx =$$

$$= \int_2^4 \left[x \cdot \frac{(\sqrt{x})^2}{2} \right] - \left[x \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} \right] dx = \int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} \right) dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32} \right) \Big|_2^4 = \left(\frac{4^3}{6} - \frac{4^4}{32} \right) - \left(\frac{2^3}{6} - \frac{2^4}{32} \right) =$$

$$= \frac{64}{6} - \frac{256}{32} - \frac{8}{6} + \frac{16}{32} = \frac{11}{6} \cong \boxed{1,83} .$$

3) Calcule $\iint_R (2x - y^2) dA$ na região entre $y = -x + 1$, $y = x + 1$ e $y = 3$.

Resolução :

■ Considerando \mathfrak{R} do tipo \mathfrak{R}_2 temos . . . $\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$.

$$\text{Daí : } \begin{cases} y = -x + 1 \Leftrightarrow x = -y + 1 \rightarrow \mathbf{h_1(y)} \\ y = x + 1 \Leftrightarrow x = y - 1 \rightarrow \mathbf{h_2(y)} \end{cases}$$

Como $y = y \Leftrightarrow -x + 1 = x + 1 \Leftrightarrow -x - x = 1 - 1 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 0}$ e $\mathbf{y = 1}$.

■ Portanto . . . $\iint_R (2x - y^2) dA = \int_1^3 \int_{-y+1}^{y-1} (2x - y^2) dx dy = \int_1^3 \left[\int_{-y+1}^{y-1} (2x - y^2) dx \right] dy =$

$$= \int_1^3 \left[(x^2 - xy^2) \Big|_{-y+1}^{y-1} \right] dy = \int_1^3 \left\{ [(y-1)^2 - (y-1)y^2] - [(1-y)^2 - (1-y)y^2] \right\} dy =$$

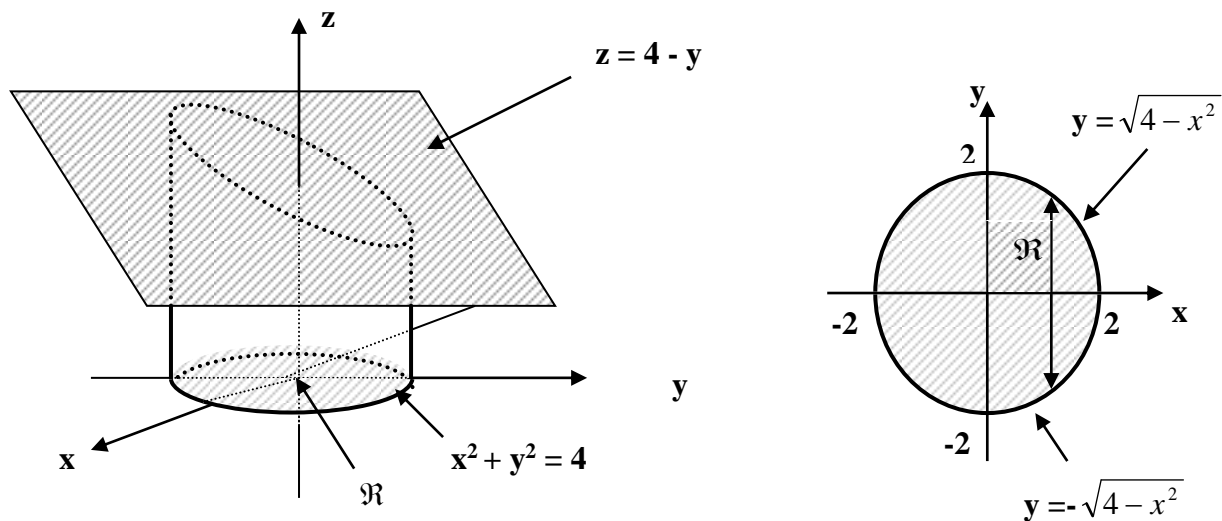
$$= \int_1^3 \left\{ [y^2 - 2y + 1 - y^3 + y^2] - [1 - 2y + y^2 - y^2 + y^3] \right\} dy =$$

$$= \int_1^3 \{ y^2 - 2y + 1 - y^3 + y^2 - 1 + 2y - y^2 + y^2 - y^3 \} dy = \int_1^3 (-2y^3 + 2y^2) dy = 2 \cdot \int_1^3 (-y^3 + y^2) dy =$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_1^3 = 2 \left[\left(-\frac{3^4}{4} + \frac{3^3}{3} \right) - \left(-\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} \right) \right] = 2 \cdot \left[-\frac{81}{4} + 9 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right] = -\frac{68}{3} \cong \boxed{-22,67} .$$

4) Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e os planos $y + z = 4$ e $z = 0$.

Resolução :



Temos :

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacksquare x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow \pm \sqrt{4 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ e } x = 2 \\ \blacksquare y + z = 4 \Leftrightarrow z = 4 - y \text{ (plano superior)} \\ \blacksquare z = 0 \Rightarrow \text{Plano } xy \text{ (plano inferior)} \end{array} \right.$$

Portanto . . .

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_R (4-y) dA = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-y) dy dx = \int_{-2}^2 \left[\left(4y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \right] dx = \\
 &= \int_{-2}^2 \left[\left(4\sqrt{4-x^2} - \frac{(\sqrt{4-x^2})^2}{2} \right) - \left(4(-\sqrt{4-x^2}) - \frac{(-\sqrt{4-x^2})^2}{2} \right) \right] dx = \\
 &= \int_{-2}^2 \left(4\sqrt{4-x^2} - \frac{4+x^2}{2} + 4\sqrt{4-x^2} + \frac{4+x^2}{2} \right) dx = \int_{-2}^2 8\sqrt{4-x^2} dx = 8 \cdot \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx
 \end{aligned}$$

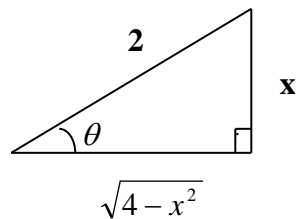
• Voltando para a aula n° 5 temos , pelo caso I . . .

$$8 \cdot \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx \rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2. \\ b^2 = 1 \Leftrightarrow b = 1. \\ u^2 = x^2 \Leftrightarrow u = x. \\ u = \frac{a}{b} \cdot \text{sen } \theta = \frac{2}{1} \text{sen } \theta \Leftrightarrow u = x = 2 \cdot \text{sen } \theta. \\ dx = 2 \cdot \text{cos } \theta d\theta. \\ \sqrt{4-x^2} = a \cdot \text{cos } \theta = 2 \cdot \text{cos } \theta. \\ \text{Intervalo: } [-2,2] \equiv [0,2\pi]. \end{cases}$$

$$\therefore 8 \cdot \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = 8 \int_{-2}^2 2 \text{cos } \theta d\theta = 8 \cdot 2 \int_{-2}^2 \text{cos } \theta d\theta = 16(\text{sen } \theta) \Big|_{-2}^2$$

• Voltando para a variável original “ x “ ...

Como $x = 2 \sin \theta \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{CO}{HI} = \frac{x}{2}$ logo



$$\text{Daí, } 16 \sin \theta = 16 \cdot \frac{CO}{HI} = 16 \cdot \frac{x^{**}}{2} = (8x) \left. \begin{array}{l} \pi \cdot r^2 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right| \therefore$$

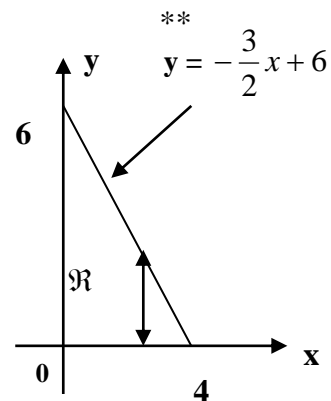
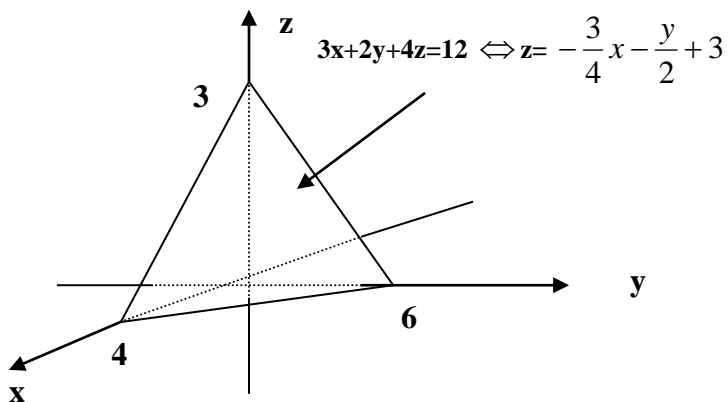
$$\text{Portanto, } 8 \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = (8x) \left. \begin{array}{l} \pi \cdot r^2 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right| = 8 \cdot 2\pi \Leftrightarrow \mathbf{V = 16\pi \text{ u.v.}}$$

$$** \quad \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

Mudança de diferencial

Exercícios :

- 1) Use a integral dupla para calcular o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e os planos $z = 0$ e $z = 3 - x$.
- 2) Calcule o volume do sólido (**Tetraedro**) abaixo :



** Basta fazer $z = 0$ em $3x + 2y + 4z = 12$, portanto $y = -\frac{3}{2}x + 6$.

3) Faça o exercício 1 sem efetuar a **mudança de diferencial**.

4) Faça o exemplo 4 sem efetuar a **mudança de diferencial**.

CÁLCULO III – ENGENHARIAS – AULA 10

Integral Tripla

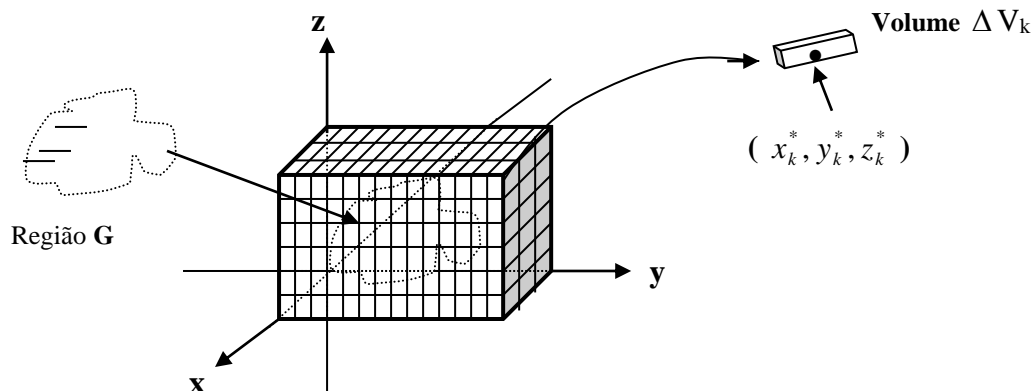
Podemos relacionar as integrais simples com funções de uma variável, as duplas com funções de duas variáveis, portanto, quando temos uma **Integral Tripla**, esta está relacionada a uma função de **três variáveis** [$f(x,y,z)$].

A definição segue a linha das anteriores e a figura será uma caixa dividida em “subcaixas” por meio de planos paralelos tomando-se as caixas que estejam **totalmente** em **G** (sólido estudado) e novamente , quando o número de subcaixas tende ao infinito com o ponto arbitrário (x_k^*, y_k^*, z_k^*), e o volume ΔV_k de cada caixa tendendo a zero.

Daí, pela soma de Riemann $\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k$, temos :

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \Delta V_k$$

Veja a figura :

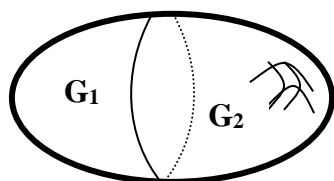


Propriedades das Integrais triplas

$$\text{I) } \iiint_G k \cdot f(x, y, z) dV = k \cdot \iiint_G f(x, y, z) dV, \quad \mathbf{k} : \text{constante.}$$

$$\text{II) } \iiint_G [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] dV = \iiint_G f(x, y, z) dV \pm \iiint_G g(x, y, z) dV$$

III) Ao dividirmos \mathbf{G} em sub-regiões \mathbf{G}_1 e \mathbf{G}_2



$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iiint_{G_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{G_2} f(x, y, z) dV$$

Calculando Integrais Triplas em Caixas Retangulares

Analogamente às integrais duplas, usaremos **Integrações Sucessivas**.

Pelo teorema :

- ▣ Seja \mathbf{G} a caixa retangular definida pelas desigualdades $\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$; $\mathbf{c} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{d}$; $\mathbf{m} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{n}$.
Se \mathbf{f} for contínua na região \mathbf{G} , temos :

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_m^n f(x, y, z) dz dy dx$$

Exemplos :

1) Calcule a integral tripla $\iiint_G 12xy^2z^3 dV$, na caixa retangular $\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$.

Resolução :

$$\begin{aligned} \iiint_G (12xy^2z^3) dV &= \int_{-1}^2 \int_0^3 \int_0^2 (12xy^2z^3) dz dy dx = \int_{-1}^2 \int_0^3 (3xy^2z^4) \Big|_0^2 dy dx = \int_{-1}^2 \int_0^3 (3xy^2 \cdot 2^4) \Big|_0^2 dy dx = \int_{-1}^2 (48xy^2) dy dx = \\ &= \int_{-1}^2 (16xy^3) \Big|_0^3 dx = \int_{-1}^2 (16x3^3) dx = \int_{-1}^2 (432x) dx = \left(432 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^2 = 432 \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 432 \cdot \frac{3}{2} = \boxed{648} . \end{aligned}$$

2) Calcule a integral tripla $\iiint_G xyz^2 dV$, onde $G = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 3\}$.

Resolução :

$$\begin{aligned} \iiint_G (xyz^2) dV &= \int_0^1 \int_{-1}^2 \int_0^3 (xyz^2) dz dy dx = \int_0^1 \int_{-1}^2 (xy \frac{z^3}{3}) \Big|_0^3 dy dx = \int_0^1 \int_{-1}^2 (xy \frac{3^3}{3}) dy dx = \int_0^1 \int_{-1}^2 (9xy) dy dx = \\ &= \int_0^1 \left(9x \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-1}^2 dx = \int_0^1 \left[\frac{9}{2} x (2^2 - (-1)^2) \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{9}{2} x (4 - 1) \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{27}{2} x \right] dx = \frac{27}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \boxed{\frac{27}{4}} \end{aligned}$$

Calculando Integrais Triplas em Caixas Não – Retangulares

Analisando a figura . . .

Temos o seguinte teorema :

Seja \mathbf{G} o sólido \mathbf{xy} simples com superfície superior $\mathbf{z} = \mathbf{g}_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$ e superfície inferior $\mathbf{z} = \mathbf{g}_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ e seja \mathcal{R} a projeção de \mathbf{G} no plano \mathbf{xy} . Se $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ for contínua em \mathbf{G} então :

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

Para $\mathfrak{R} \subset \text{plano } xy$

Obs. :

$$\text{Para } \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{R} \subset \text{plano } \mathbf{xz} \text{ temos } \iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x, y, z) dy \right] dA \\ \mathfrak{R} \subset \text{plano } \mathbf{yz} \text{ temos } \iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right] dA \end{array} \right.$$

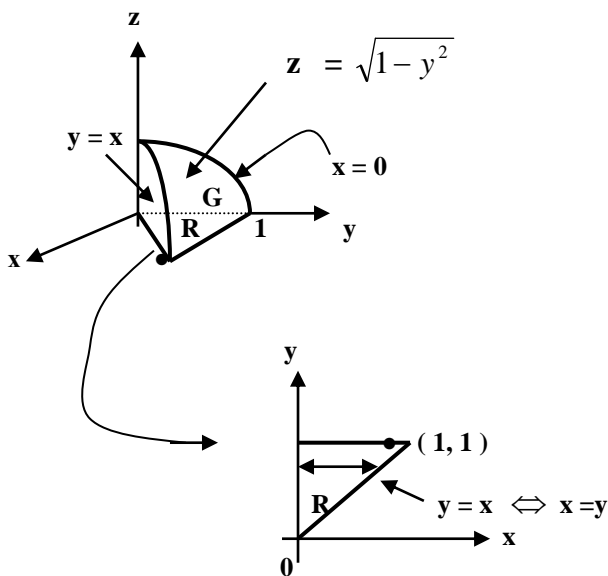
Exemplos :

1) Seja G a cunha do primeiro octante seccionada do sólido cilíndrico $y^2 + z^2 \leq 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 0$. Calcule $\iiint_G z dV$.

Resolução :

$$\text{Temos } y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow z^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{1 - y^2} \rightarrow z = \sqrt{1 - y^2}$$

Porção acima do plano xy



Portanto . . .

$$\begin{aligned}
 \iiint_G f(x, y, z) dV &= \iint_R \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA = \int_0^1 \int_0^y \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} z dz \right] dx dy = \int_0^1 \int_0^y \left[\left. \frac{z^2}{2} \right|_0^{\sqrt{1-y^2}} \right] dx dy = \\
 &= \int_0^1 \int_0^y \left[\left. \frac{z^2}{2} \right|_0^{\sqrt{1-y^2}} \right] dx dy = \int_0^1 \int_0^y \left(\frac{(\sqrt{1-y^2})^2}{2} \right) dx dy = \int_0^1 \int_0^y \left(\frac{1-y^2}{2} \right) dx dy = \int_0^1 \frac{1}{2} \int_0^y (1-y^2) dx dy = \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2} \int_0^y (1-y^2) dx dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (x - xy^2) \Big|_0^y dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (y - yy^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y - y^3) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^1 dy = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2-1}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{8}}.
 \end{aligned}$$

Calculando volumes usando Integral Tripla

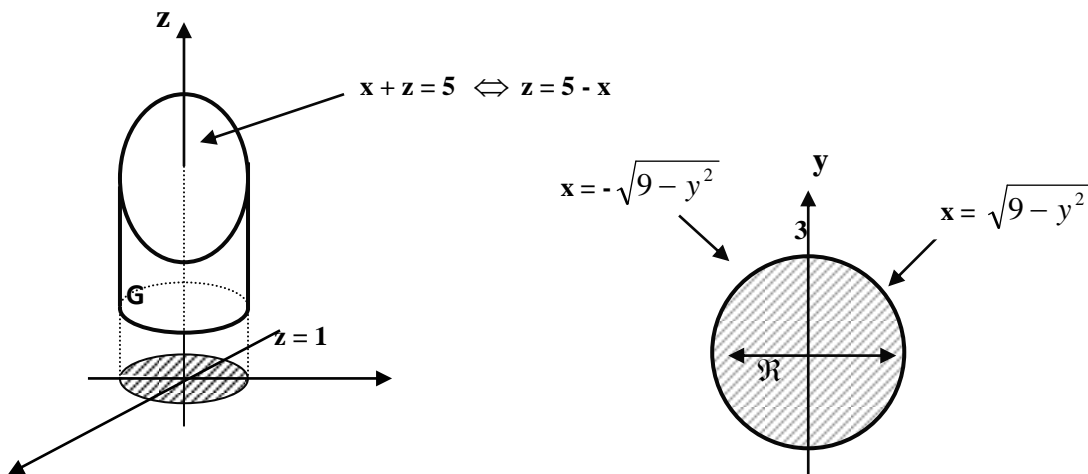
Quando $f(x, y, z) = 1$ temos a garantia de uma figura tridimensional, logo

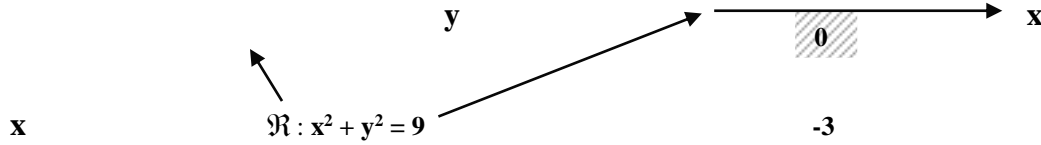
$$\iiint_G dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \Delta V_k \text{ representa o volume de } \mathbf{G} \text{ e indicamos } \boxed{\mathbf{V} = \iiint_G dV}.$$

Exemplos :

1) Use a **integral tripla** para calcular o volume do sólido contido no cilindro $x^2 + y^2 = 9$ entre os planos $z = 1$ e $x + z = 5$.

Resolução :





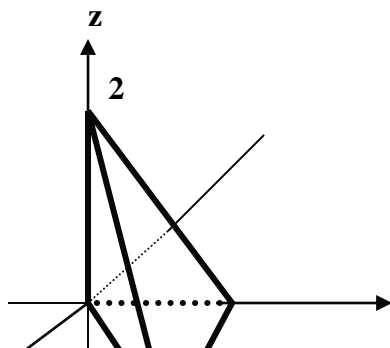
Portanto, com $\mathcal{R} \subset \text{plano } xy \dots$

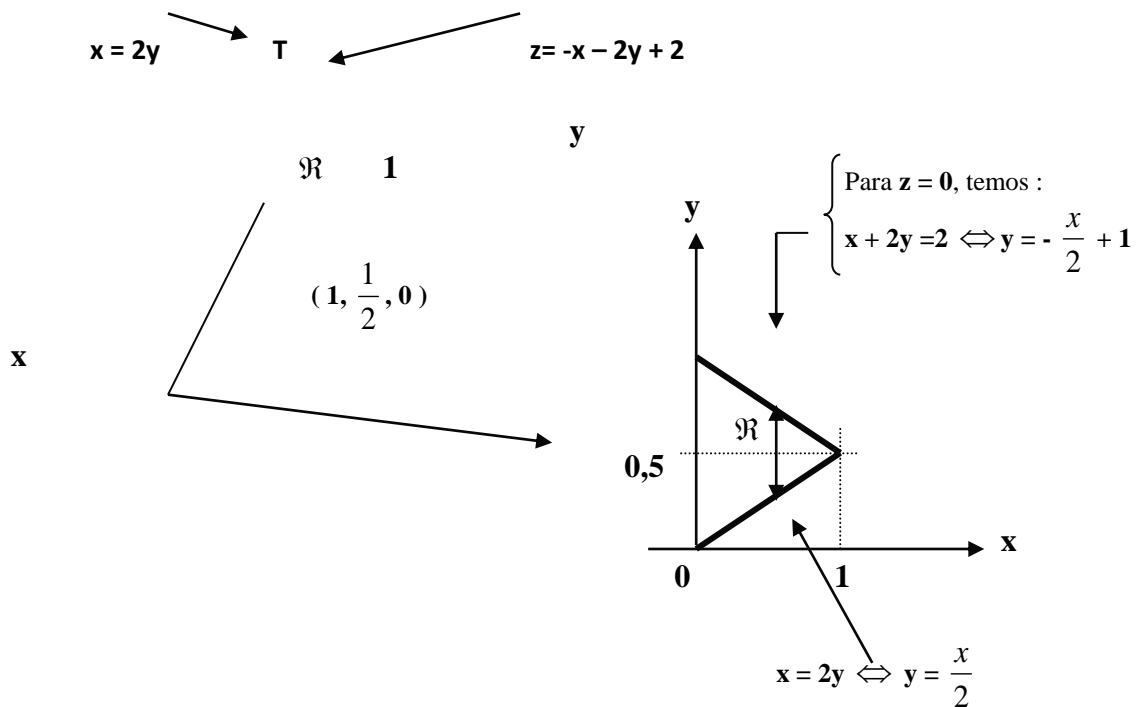
$$\begin{aligned}
 \int_{-3-\sqrt{9-y^2}}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_1^{5-x} dz dx dy &= \int_{-3-\sqrt{9-y^2}}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} z \Big|_1^{5-x} dx dy = \int_{-3-\sqrt{9-y^2}}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} (5-x-1) dx dy = \int_{-3-\sqrt{9-y^2}}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} (4-x) dx dy = \\
 &= \int_{-3}^3 \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dy = \int_{-3}^3 \left(\frac{8x-x^2}{2} \right) \Big|_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dy = \frac{1}{2} \int_{-3}^3 (8x-x^2) \Big|_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-3}^3 \left[(8\sqrt{9-y^2}) - (\sqrt{9-y^2})^2 - (8(-\sqrt{9-y^2})) - (-\sqrt{9-y^2})^2 \right] dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-3}^3 \left[(8\sqrt{9-y^2}) - (9-y^2) - (-8\sqrt{9-y^2} - (9-y^2)) \right] dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-3}^3 \left[(8\sqrt{9-y^2}) - (9-y^2) + 8\sqrt{9-y^2} + (9-y^2) \right] dy = \frac{1}{2} \int_{-3}^3 16\sqrt{9-y^2} dy = 8 \int_{-3}^3 \sqrt{9-y^2} dy = \\
 &= 8 \cdot \frac{9}{2} \pi = \boxed{36 \pi \text{ u.v}} .
 \end{aligned}$$

Subst. Trigon.

2) Idem para o cálculo do **tetraedro T** limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

Resolução :



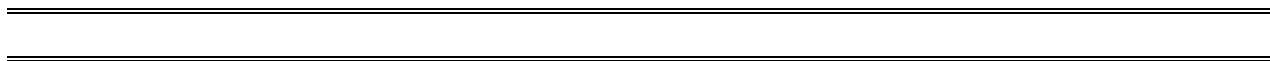


Portanto, com $\mathfrak{R} \subset \text{plano } xy \dots$

$$\begin{aligned}
 V_T &= \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{-\frac{x}{2}+1} \int_0^{-x-2y+2} dz dy dx = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{-\frac{x}{2}+1} (z) \Big|_0^{-x-2y+2} dy dx = \\
 &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{-\frac{x}{2}+1} (-x-2y+2) dy dx = \int_0^1 (-xy - y^2 + 2y) \Big|_{\frac{x}{2}}^{-\frac{x}{2}+1} dx = \\
 &= \int_0^1 \left\{ \left[-\left(-\frac{x}{2}+1\right) \cdot x - \left(-\frac{x}{2}+1\right)^2 + 2\left(-\frac{x}{2}+1\right) \right] - \left[-\left(\frac{x}{2}\right) \cdot x - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{2}\right) \right] \right\} dx = \\
 &= \int_0^1 \left\{ \left[\left(\frac{x}{2}-1\right) \cdot x - \left(1-x+\frac{x^2}{4}\right) - x+2 \right] - \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + x \right] \right\} dx = \\
 &= \int_0^1 \left\{ \frac{x^2}{2} - x - 1 + x - \frac{x^2}{4} - x + 2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} - x \right\} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - x - x - 1 + 2 \right) dx =
 \end{aligned}$$



$$= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - 1^2 + 1 = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3} \mathbf{u.v} \quad .$$



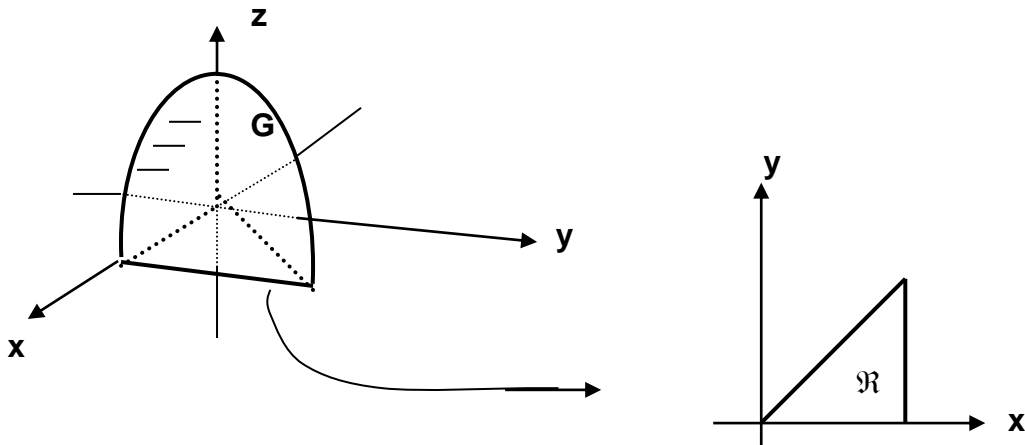
CÁLCULO III – ENGENHARIAS – AULA 11

Exercícios de Integração Tripla :

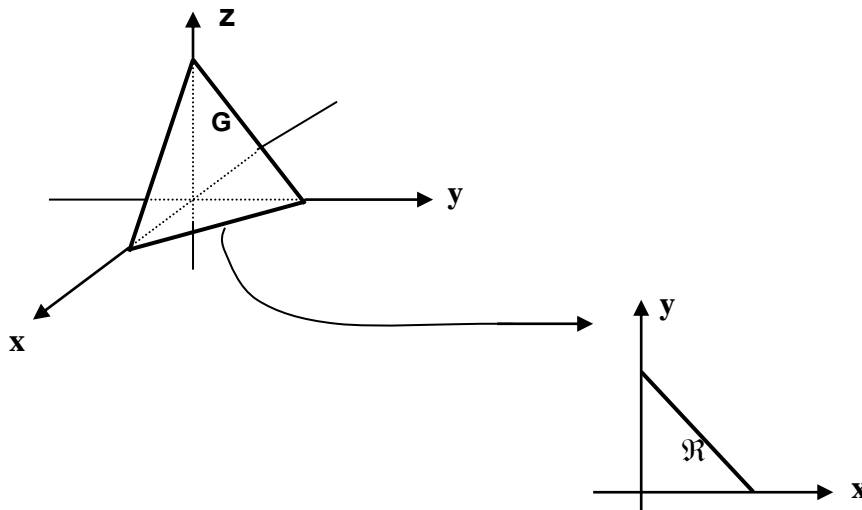
1) Calcule o volume do sólido compreendido entre os parabolóides $z = 5x^2 + 5y^2$ e $z = 6 - 7x^2 - y^2$. [Dica : Faça $z = z$, ache a variação em y (função) e iguale a zero e ache a variação em x (valores)]

2) Calcule $\int_1^3 \int_x^{x^2 \ln z} \int_0^z (x.e^y) dy dz dx$.

3) Calcule $\iiint_G xyz dV$, onde G é o sólido do primeiro octante limitado pelo cilindro parabólico $z = 2 - x^2$ e os planos $z = 0$, $y = x$ e $y = 0$.



4) Calcule o volume do tetraedro limitado pelos planos coordenados e pelo plano $2x + 3y + 6z = 12$.



BIBLIOGRAFIA

ÁVILA, G.: *Cálculo (3 volumes)*. LTC, 1994.

AVRITZER, D. & CARNEIRO, M. J. D. : *Lições de Cálculo Integral em Várias Variáveis*. CAED-UFMG, 2012. [Link para o arquivo pdf](#)

GUIDORIZZI, H.: *Um Curso de Cálculo (4 volumes)*. LTC, 2001.

LEITHOLD, L.: *O Cálculo com Geometria Analítica (2 volumes)*. Harbra, 1994.

MARSDEN, J.E. and TROMBA, A.J.: *Vector Calculus, 4ª edição*. W.H.Freeman and Co., 1996.

PINTO, D. e MORGADO, M.C.F. : *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*. Editora UFRJ, 1999

PISKUNOV, N.: *Cálculo Diferencial e Integral (2 volumes), 6ª edição*. MIR, 1983.

SIMMONS, G. F.: *Cálculo com geometria Analítica (2 volumes)*. McGraw-Hill, 1987.

SPIVAK, M.: *Calculus. 3ª edição*. Publish or Perish, 1994.

STEWART, J.: *Cálculo - Vol. 2, 6ª edição*. Editora Pioneira Thomson Learning, 2009.

ANTON, H.: *Cálculo, Um Novo Horizonte - Vol. 2, 6ª edição*. Editora Bookman, 2000.

THOMAS, G.: *Cálculo – Vol. 2, 10ª edição*. Editora Addison Wesley, 2003.